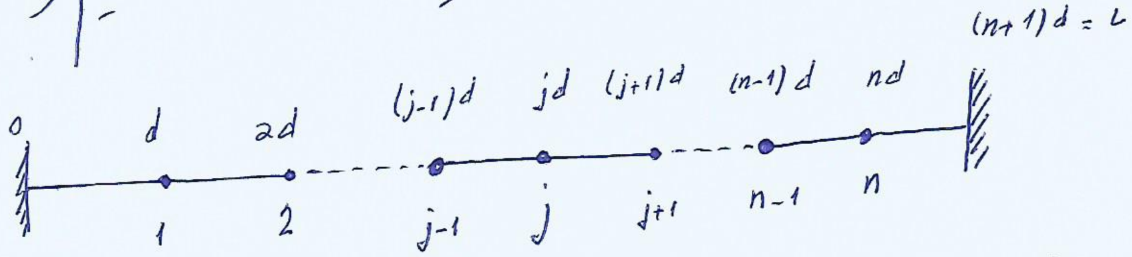
۱/

مکانیک تحلیلی ۲   نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹   ۱۰ خرداد ۱۳۹۹

سیستم های پیوسته، موج و نظریه میدان کلاسیک

تا کنون در درس مکانیک تحلیلی به بررسی دینامیک ذرات، مجموعه ذرات و اجسام صلب پرداخته ایم.
در مجموعه پیش رو به بررسی حرکت و دینامیک سیستم های پیوسته غیر صلب خواهیم پرداخت و به طور خاص سیستم هایی را مطالعه خواهیم کرد که در آن ها اختلال منتشر می شود. و معادله موج بر دینامیک اختلال ها حاکم است. سیستم های پیوسته دریچه ای برای مطالعه نظریه میدان های کلاسیک باز خواهد کرد.

به عنوان اولین مثال ریسمان پیوسته را به عنوان حالت حدی ریسمان بارگذاری شده بررسی خواهیم کرد.



(شکل ۱)

در این مثال n (تعداد ذرات) را به سمت بی نهایت میل می دهیم $n\to\infty$ هم زمان جرم ذرات، فاصله بین آن ها به صفر میل خواهد کرد.

$\begin{cases} m\to 0 \\ d\to 0 \end{cases}$ به طوری که نسبت m/d ثابت خواهد ماند در نتیجه

$$(1)\qquad n\to\infty \qquad d\to 0 \qquad (n+1)\,d = L$$

$$m\to 0 \qquad d\to 0 \qquad m/d = \rho = cte$$

2.

در درس نامه های قبل نشان دادیم که دینامیک ذره j به صورت زیر خواهد بود.

(2) $$q_j(t) = \underbrace{\sum_r}_{\text{sum over frequencies.}} \underbrace{\eta_r(t)}_{\text{normal Coordinate}} \sin\left(j\,\frac{r\pi}{n+1}\right)$$

حال می‌توان ترم زیر را به صورت پیوسته بنویسیم.

(3) $$j\,\frac{r\pi}{n+1} = r\pi\,\frac{jd}{(n+1)\,d} = r\pi\,\frac{x}{L}$$

که $jd = x$، موقعیت را بر روی ریسمان پیوسته نشان می‌دهد. در نتیجه q_j تابع پیوسته‌ای از x, t خواهد بود.

(4) $$q(x,t) = \sum_r \eta_r(t)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) = \sum_r \beta_r\, e^{i\omega_r t}\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$$

در حالت گسسته تعداد درجات آزادی به تعداد جرم های برابر بود و ارتباط داشت (n مورد) و در نتیجه فرکانس ها $r = 1, \dots, n$ ، مدهای نرمال محدود، n تا بودند. در حالت پیوسته تعداد درجات آزادی بی نهایت و شرایط اولیه با $q(x,0)$, $\dot{q}(x,0)$ مشخص می‌شوند.

به بیان دیگر قسمت حقیقی و موهومی β_r با شرایط اولیه مشخص می‌شود.

(5) Note $\beta_r = \mu_r + i\nu_r$

$$q(x,0) = \sum_r \mu_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \tag{6}$$

$$\dot{q}(x,0) = -\sum_r \omega_r \nu_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \tag{7}$$

حال با ضرب این روابط در $\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)$ و انتگرال‌گیری از $x=0$ تا $x=L$ و استفاده از رابطه تعامد

$$\int_0^L \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{rs} \tag{8}$$

که از روابط فوق می‌توانیم μ_r و ν_r را با استفاده از شرایط اولیه محاسبه کنیم

$$\mu_r = \frac{2}{L}\int_0^L q(x,0)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)dx \tag{9}$$

$$\nu_r = \frac{-2}{\omega_r L}\int_0^L \dot{q}(x,0)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)dx \tag{10}$$

و به همین ترتیب فرکانس حالت پیوسته نیز به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\omega_r = 2\sqrt{\tau/md}\,\sin\left[\frac{r\pi}{2(n+1)}\right] \tag{11}$$

با ضرب d در صورت و مخرج خواهیم داشت

$$\frac{r\pi}{2(n+1)} \rightarrow \frac{rd\pi}{2d(n+1)} = \left(\frac{r\pi d}{2L}\right) \tag{12}$$

$$\omega_r = \frac{2}{d}\sqrt{\tau/\rho}\,\sin\left(\frac{r\pi d}{2L}\right) \underset{d\to 0}{\simeq} \frac{r\pi}{L}\sqrt{\tau/\rho} \tag{13}$$

انرژی ریسمان در تنش :

با توجه به این که تاکنون از انرژی نیروهای اتلافی صرف نظر کرده ایم، باید پایستگی انرژی ریسمان را نشان دهیم.

انتظار داریم که انرژی ریسمان از جمع بر روی تمام مدهای ممکن باشد.

$$q(x,t) = \sum_r \eta_r(t) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \quad \text{که} \quad \eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t} \tag{14}$$

که β_r کمیت مختلط است و جواب فیزیکی قسمت حقیقی جواب است.

انرژی جنبشی ریسمان از جمع بر روی المان های ریسمان به دست می آید.

$$dT = \frac{1}{2} \underbrace{(\rho\, dx)}_{\text{mass}} \dot{q}^2 \rightarrow T = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 dx \tag{15}$$

حال جواب (14) را در انرژی جنبشی جایگذاری می کنیم.

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \left[\sum_r \dot{\eta}_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\right]^2 dx \tag{16}$$

ترم مربع را می توانیم به صورت جمع بر روی دو اندیس شمارنده و کانس نوشت.

$$T = \frac{1}{2}\rho \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \underbrace{\int_0^L \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx}_{L/2\ \delta_{rs}} \tag{17}$$

نتیجه

$$T = \frac{\rho L}{4} \sum_r \dot{\eta}_r^2 \tag{18}$$

البته باید توجه داشت که قسمت حقیقی را در انرژی جنبشی در نظر گرفت

$$(19)\qquad (\mathrm{Re}\,\dot{\eta}_r)^2 = \left(\mathrm{Re}\,\frac{d}{dt}\left[(\mu_r + i\nu_r)(\cos\omega_r t + i\sin\omega_r t)\right]\right)^2$$

$$= \left(-\omega_r \mu_r \sin\omega_r t - \omega_r \nu_r \cos\omega_r t\right)^2$$

نتیجه انرژی جنبشی بصورت زیر خواهد بود.

$$(20)\qquad T = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \left(\mu_r \sin\omega_r t + \nu_r \cos\omega_r t\right)^2$$

حال برای محاسبه انرژی پتانسیل، مجدداً از حد ریسمان بارگذاری شده استفاده خواهیم کرد.

$$(21)\qquad U = \frac{1}{2}\frac{\tau}{d}\sum_j \left(q_{j-1} - q_j\right)^2$$

با ضرب و تقسیم بر d خواهیم داشت

$$(22)\qquad U = \frac{1}{2}\tau \sum_j \left(\frac{q_{j-1} - q_j}{d}\right)^2 d$$

در حد $d \to 0$ مشتق جزئی را خواهیم داشت

$$(23)\qquad U = \frac{1}{2}\tau \int_0^L \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$(24)\qquad q(x,t) = \sum_r \eta_r(t)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = \sum_r \frac{r\pi}{L}\eta_r \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$$

درنتیجه انرژی پتانسیل به صورت زیر خواهد بود.

$$U = \frac{1}{2}\tau\int_0^L \left[\sum_r \frac{r\pi}{L}\eta_r \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\right]^2 dx \tag{25}$$

مجدداً می‌توانیم جمع بر روی فرکانس‌ها r را بر روی کمیت کمکی s نیز بنویسیم.

$$U = \frac{\tau}{2}\sum_{r,s}\frac{r\pi}{L}\cdot\frac{s\pi}{L}\eta_s\eta_r \underbrace{\int_0^L \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{s\pi x}{L}\right)dx}_{L/2\,\delta_{rs}} \tag{26}$$

$$U = \tau/2\,\frac{r^2\pi^2}{L^2}\cdot\frac{L}{2}\eta_r^2 \tag{27}$$

با توجه به این که $\omega_r^2 = \frac{r^2\pi^2}{L^2}\cdot\frac{\tau}{\rho}$ ، انرژی پتانسیل برابر خواهد بود با

$$U = \frac{\rho L}{4}\sum_r \omega_r^2\eta_r^2 \tag{28}$$

حال با محاسبه قسمت حقیقی η_r^2 خواهیم داشت.

$$U = \frac{\rho L}{4}\sum_r \omega_r^2\left(\mu_r\cos\omega_r t - \nu_r\sin\omega_r t\right)^2 \tag{29}$$

نکته جالب این است که اکنون می‌توانیم انرژی کل سیستم را به صورت زیر به دست آوریم.

$$E = T + U = \frac{\rho L}{4}\sum_r \omega_r^2\left(\mu_r^2+\nu_r^2\right) \tag{30}$$

(31) $$E = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \, |\beta_r|^2$$

درنتیجه انرژی کل سیستم ثابت است و مجموع انرژی هر یک از مدها است.

یکی از کمیت‌های مرتبط و مفید دیگر، انرژی متوسط‌گیری شده است.

(32) Time-averaged Kinetic

$$\langle T \rangle = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \langle (\mu_r \sin \omega_r t + \nu_r \cos \omega_r t)^2 \rangle$$

متوسط‌گیری برای دوره تناوب $2\pi/\omega_1$

مدهای بالاتر میانگین یکسان $\frac{1}{2}$ را می‌دهند، ترم‌های ضربدری صفر هستند درنتیجه

(33) $$\langle T \rangle = \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2)$$

$$= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2$$

برای میانگین‌گیری انرژی پتانسیل نیز خواهیم داشت.

(34) $$\langle U \rangle = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \langle (\mu_r \cos \omega_r t - \nu_r \sin \omega_r t)^2 \rangle$$

$$= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2) = \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2$$

درنتیجه میانگین انرژی‌ها کاملاً برابرند.

(35) $$\langle T \rangle = \langle U \rangle$$

معادله موج :

برای به دست آوردن معادله موج، مجدداً از ایده پیوسته سازی ریسمان بارگذاری استفاده خواهیم کرد. معادله حاکم برابر است با

$$\frac{m}{d}\ddot{q}_j = \frac{\tau}{d}\left(\frac{q_{j-1}-q_j}{d}\right) - \frac{\tau}{d}\left(\frac{q_j-q_{j+1}}{d}\right) \tag{36}$$

حال اگر d را به سمت صفر میل دهیم.

$$\begin{cases} \dfrac{q_j - q_{j+1}}{d} \to \dfrac{q(x) - q(x+d)}{d} \to -\dfrac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x+d/2} \\[2ex] \dfrac{q_{j-1} - q_j}{d} \to \dfrac{q(x-d) - q(x)}{d} \to -\dfrac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x-d/2} \end{cases} \tag{37}$$

حال سمت راست معادله 36 برابر خواهد بود با

$$\lim \tau \left(\frac{\frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x+d/2} - \frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{x-d/2}}{d}\right) = \tau\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\Big|_x = \tau\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \tag{38}$$

حال در حد مورد نظر m/d تبدیل به چگالی می‌شود. در نتیجه معادله حرکت برابر خواهد بود با

$$\rho\ddot{q} = \tau\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \tag{39}$$

معادله (39) معادله موج است در باید شود که حل آن را در ادامه بررسی خواهیم کرد.

معادله موج را به سادگی می‌توانیم از معادله اویلر - لاگرانژ نیز به دست آوریم. با توجه به روابط مربوط به انرژی جنبشی و پتانسیل خواهیم داشت.

$$(40) \quad \begin{cases} T = \dfrac{\rho L}{4} \sum_r \dot{\eta}_r^2 \\ U = \dfrac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2 \end{cases} \rightarrow \underbrace{L}_{\text{لاگرانژی}} = \dfrac{\rho \overset{\text{طول ریسمان}}{b}}{4} \sum_r \left(\dot{\eta}_r^2 - \omega_r^2 \eta_r^2 \right)$$

معادله حرکت با توجه به لاگرانژی (40) برابر خواهد بود با

$$(41) \quad \ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

به طور واضح می‌توان ترم اتلاف damping term، نیروی وادارشده forced term را اضافه کنیم

$$(42) \quad \rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \underbrace{D}_{\text{damping term}} \frac{\partial q}{\partial t} - \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = F(x,t)$$

برای حل این مسئله مدهای اولیه به صورت رابطه زیر را جایگذاری می‌کنیم.

$$(43) \quad q(x,t) = \sum_r \eta_r(t) \sin\left(\frac{r \pi x}{b}\right)$$

با جایگذاری در رابطه (42) خواهیم داشت.

$$(44)\qquad \sum_{r=1}^{\infty}\left[\left(\rho\ddot{\eta}_r+D\dot{\eta}_r+\frac{r^2\pi^2\tau}{b^2}\eta_r\right)\sin\left(\frac{r\pi x}{b}\right)\right]=F(x,t)$$

با ضرب این رابطه در $\sin\left(\frac{s\pi x}{b}\right)$ انتگرال گیری dx خواهیم داشت

$$(45)\qquad \sum_{r=1}^{\infty}\left(\rho\ddot{\eta}_r+D\dot{\eta}_r+\frac{r^2\pi^2\tau}{b^2}\eta_r\right)\frac{b}{2}\delta_{rs}$$

$$=\int_0^b F(x,t)\sin\left(\frac{s\pi x}{b}\right)dx$$

درنتیجه

$$(46)\qquad \ddot{\eta}_s+\frac{D}{\rho}\dot{\eta}_s+\frac{s^2\pi^2\tau}{\rho b^2}\eta_s=\frac{2}{\rho b}\int_0^b F(x,t)\sin\left(\frac{s\pi x}{b}\right)dx$$

که سمت راست رابطه (46)، ضریب فوریه مربوط به فرکانس s را داریم.

$$(47)\qquad \begin{cases}\ddot{\eta}_s+\frac{D}{\rho}\dot{\eta}_s+\frac{s^2\pi^2\tau}{\rho b^2}\eta_s=\frac{2}{\rho b}f_s(t)\\ \text{که}\quad f_s(t)=\int_0^b F(x,t)\sin\left(\frac{s\pi x}{b}\right)dx\end{cases}$$

به عنوان مثال فرض کنید نیروی واداشته کسینوسی در $x=\frac{b}{2}$ به سیستم وارد شود.

درنتیجه

$$(48)\qquad F(x,t)=\begin{cases}F_0\cos\omega t & x=\frac{b}{2}\\ =0 & x\neq\frac{b}{2}\end{cases}$$

این بدین معنا است که مؤلفه s ام نیروی وارد شده بصورت زیر خواهد بود.

(49)
$$\begin{cases} f_s(t) = F_0 \cos \omega t \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \\ \ddot{\eta}_s + \frac{D}{\rho}\dot{\eta}_s + \frac{s^2\pi^2\tau}{\rho b^2}\eta_s = \frac{2}{\rho b} F_0 \cos \omega t \sin \frac{s\pi}{2} \end{cases}$$

حال فرض کنید که جواب خصوصی این معادله را محاسبه کنیم با دانش فیزیک کلاسیک I در سمت چپ و روابط زیر داریم.

(۵۰)

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$$ (الف)

(ب)

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

$$2\beta = \frac{D}{\rho}$$ ۱)

$$\omega_0^2 \equiv \frac{s^2\pi^2\tau}{\rho b^2}$$ ۲)

(ج)
$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$A \equiv \frac{2F_0 \sin(s\pi/2)}{\rho b}$$ ۳)

در نتیجه جواب η_s برابر خواهد بود.

(۵۱)
$$\eta_s(t) = \frac{2F_0 \sin(s\pi/2) \cos(\omega t - \delta)}{\rho b \sqrt{\left(\frac{s^2\pi^2\tau}{\rho b^2} - \omega^2\right) + \frac{D^2}{\rho^2}\omega^2}}$$

$$(52)\qquad \delta = \tan^{-1}\left[\frac{D\omega}{\rho\left(\frac{s^2\pi^2\tau}{\rho b^2}-\omega^2\right)}\right]$$

حال جابجایی $q(x,t)$ به شکل زیر خواهد بود.

$$(53)\qquad q(x,t) = \sum_r \frac{2F_0 \sin\frac{r\pi}{2}\cos(\omega t-\delta)\sin\left(\frac{r\pi x}{b}\right)}{\rho b\sqrt{\left(\frac{r^2\pi^2\tau}{\rho b^2}-\omega^2\right)+\frac{D^2}{\rho^2}\omega^2}}$$

اگر ترم استهلاکی کوچک باشد شرط تشدید برابر است با

$$r^2 = \frac{\omega^2\rho b^2}{\pi^2\tau}$$

در ادامه درس به حل کلی معادله موج خواهیم پرداخت.

پایان درس.