

تمرین سری ۲ درس مکانیک تحلیلی ۲ - بهار ۹۹
دانشگاه فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف
تاریخ تحویل: دوشنبه ۱۸ فروردین ۱۳۹۹

- لطفا جواب تمرین را اسکن (تنها به صورت فایل PDF) و به آدرس ایمیل TA.baghran.1@gmail.com ارسال کنید.
- در عنوان ایمیل، نام درس، شماره دانشجویی و شماره سری تمرین را لحاظ بفرمایید.

۱- پرتابه‌ای در مسیر بیضوی با نیم قطر بزرگ a و نیم قطر کوچک b حول سیاره‌ای می‌گردد (مرکز سیاره روی یکی از کانون‌های بیضی است). انرژی کل پرتابه را (پتانسیل گرانشی + جنبشی) بر حسب a و b و M (جرم سیاره) و m (جرم پرتابه) بدست آورید. جواب خود را برای حالت $a = b$ چک کنید.

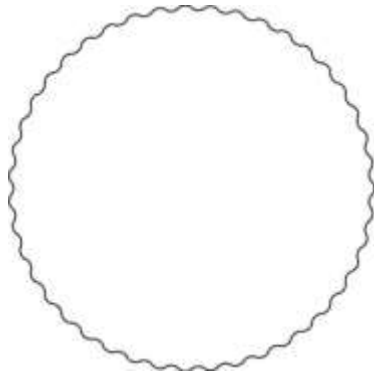
۲- پتانسیل مرکزی به صورت $V = -\frac{A}{r^{d-2}}$ در نظر بگیرید که d تعداد بعد مکانی فضا است و فرض می‌کنیم $d > 2$ و A ثابتی است مثبت. برای ذره‌ای که با تکانه زاویه‌ای L و جرم m در این پتانسیل در حال گردش است، پتانسیل موثر را بدست آورید (پتانسیلی که در رابطه‌ی:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}V_{\text{eff}}(r)$$

صدق می‌کند). نقطه‌ی تعادل این پتانسیل موثر را بدست بیاورید. چه شرطی وجود داشته باشد که این نقطه‌ی تعادل پایدار باشد؟ آیا عدد بعد جهان ما در این شرط صدق می‌کند؟ شکل پتانسیل موثر را برای ابعاد مختلف (پایدار یا ناپایدار) رسم کنید.

۳- الف) (در ادامه‌ی پرسش قبل) حال در فضای سه بعدی معمول، پتانسیل به صورت $V = Anr^n$ در نظر بگیرید که A ثابتی مثبت است، و برای ذره‌ای به جرم m و تکانه زاویه‌ای L در این پتانسیل، پتانسیل موثر را محاسبه کنید. نقطه‌ی تعادل این پتانسیل موثر را بدست بیاورید (شرط وجود نقطه‌ی تعادل چیست؟) چه شرطی وجود دارد که این نقطه یک نقطه‌ی تعادل پایدار باشد؟

ب) حال فرض کنید شرط پایدار بودن نقطه‌ی تعادل برقرار است، و یک ذره در آن نقطه تعادل قرار دارد، به این معنا که ذره‌ای روی مسیر دایره‌ای در حال گردش حول مرکز است. دوره زمانی این گردش چقدر است؟ (T_0) قصد داریم بدانیم اگر ذره کمی در راستای شعاعی از این شعاع تعادل منحرف شود چه بر سر آن خواهد آمد. در دیدگاه پتانسیل موثر اگر شعاع تعادل r_0 باشد ولی ذره (با همان جرم و تکانه زاویه‌ای) در شعاع $r = r_0 + \delta r$ که δr اختلال کوچکی است، قرار داشته باشد، آنگاه مقدار شعاع ذره حول مقدار r_0 در طول زمان نوسان می‌کند، آنگاه مسیر حرکت ذره در فضا مثل شکل زیر خواهد بود، دوره تناوب این نوسانات شعاعی T_r را بدست آورید. (راهنمایی: برای بدست آوردن T_r بسط تیلور پتانسیل موثر حول نقطه تعادل را بنویسید (تا مرتبه ۲) و از شباهت جملات ظاهر شده با پتانسیل فنر استفاده کنید)



ج) چه شرطی بین T_r و T_0 وجود داشته باشد که (مثل شکل بالا)، مسیر حاصل مسیری بسته باشد؟ برقراری این رابطه چه شرطی روی مقدار n می‌گذارد؟ آیا پتانسیل گرانش نیوتونی در این رابطه صدق می‌کند؟... البته که صدق می‌کند! چون می‌دانیم مسیرها در گرانش نیوتونی مسیره‌ای بسته اند، اما چطور مسیری فرخورده مثل شکل فوق میتواند از گرانش نیوتونی که نهایتاً جواب بیضوی به ما میدهد بدست خواهد آمد؟ کنجکاوی خودتان را قانع کنید که مسیر فرخورده فوق در حالت گرانش نیوتونی یک بیضی است که اندکی با دایره بودن اختلاف دارد.

۴- (در ادامه‌ی مساله قبل) فرض کنید منظومه شمسی را غباری رقیق با توزیع جرمی یکنواخت به چگالی جرمی b پر کرده است. فرم نیروی گرانشی و از روی آن پتانسیل گرانشی را بر حسب فاصله از خورشید بنویسید. از تاثیر برخورد ذرات غبار با جرم مورد نظر صرف نظر کنید و به خاطر این که پتانسیل در بی‌نهایت صفر نمی‌شود پریشان حال نشوید.

حال طریق مساله قبل را در پیش گرفته و در این مورد پتانسیل تصحیح یافته بخاطر غبار، برای ذره‌ای در نزدیکی شعاع تعادل به جرم m و تکانه زاویه‌ای L مقادیر T_r و T_0 را محاسبه کنید. با تقریب کوچک بودن b تا مرتبه اول نسبت به آن، اختلاف موجود بین T_r و T_0 باعث می‌شود مسیر حرکت دیگر بسته نباشد، بلکه نقطه‌ی حسیض مسیر (کمترین r)، پس از یک دور چرخش روی خودش نیفتد بلکه مقدار $\Delta\theta$ انحراف داشته باشد. $\Delta\theta$ را محاسبه کنید.

۵- الف) بردار تکانه زاویه‌ای یک ذره به صورت $L = r \times p$ تعریف می‌شود که r بردار مکان نسبت به مرکز و p بردار تکانه است. اگر نیرو مرکزی باشد، با مشتق زمانی گیری از این عبارت نشان دهید تکانه زاویه‌ای کمیتی پایسته است.

ب) فرض کنید نیروی گرانشی نیوتونی به سمت مرکز داریم به صورت: $F(r) = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$ و ذره‌ای در آن در حال حرکت است. بردار $Laplace-Runge-Lenz$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A = p \times L - mk\hat{r}$$

نشان دهید این بردار نیز پایسته است.

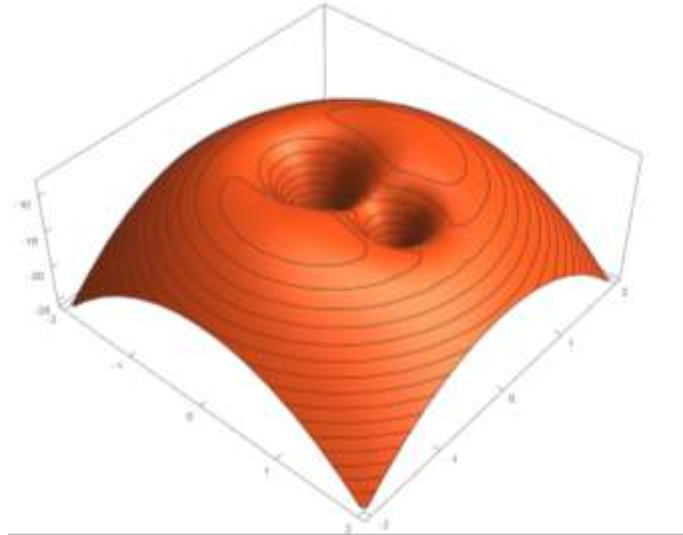
حال فرض کنید پایسته بودن این بردار را می‌دانیم. این بردار را در راستای محور x و مقدار آن را اندازه‌ای مشخص در نظر بگیرید. بردار تکانه زاویه‌ای را در راستای Z فرض کنید. نشان دهید مدار بیضوی است با بدست آوردن معادله مسیر حرکت ذره. (راهنمایی: $A \cdot \hat{r}$ را محاسبه کنید)

برای علاقه مندان: وقتی در درس کوانتوم مکانیک ۱ مساله‌ی ترازهای اتم هیدروژن را به طریق سراسر حل کردید، اسم این بردار را به خاطر بیاورید و سپس تحقیق کنید در مورد نسخه‌ی کوانتومی این بردار و بدست آوردن جبری ترازهای هیدروژن به کمک آن.

۶- حل کردن مساله‌ی سه جرم گرانشی در حالت عمومی غیر ممکن است و در واقع شناخته شده است که این یک مساله‌ی آشوبناک است. اما در مواردی خاص حل آن ممکن است. یکی از موارد خاص که در واقعیت نیز کاربرد دارد این است که دو جرم بزرگ m_1 و m_2 (مثلاً دو سیاره) در مسیرهای دایروی حول مرکز جرمشان با سرعت زاویه‌ای ω در حال چرخشند و یک جسم سوم m که آنقدر اندک است (مثلاً یک سفینه) که وجودش بر روی حرکت m_1 و m_2 تاثیری ندارد همگام با آن دو تحت تاثیر گرانش آن‌ها (با سرعت زاویه‌ای یکسان با آن‌ها) وارد گردش می‌شود. در واقع در دستگاه چرخان با سرعت زاویه‌ای ω حول مرکز جرم، مکان هر سه جسم باید ثابت باشد. در این مساله قصد داریم نقاطی را بیابیم (در دید دستگاه چرخان) که با گذاشتن جرم m در آن نقاط این اتفاق رخ دهد. به این نقاط، نقاط لاگرانژ گفته می‌شود و تعداد آن‌ها ۵ است.

الف) ω را بر حسب فاصله r_0 و m_1 و m_2 بدست آورید. نشستن در دستگاه چرخان حول مرکز جرم با این سرعت زاویه‌ای باعث دیده شدن یک نیروی مجازی گریز از مرکز \hat{r} $mr\omega^2$ یا به عبارتی یک پتانسیل (مجازی) $-\frac{mr^2\omega^2}{2}$ می‌شود. در این دستگاه انرژی پتانسیل کل ذره‌ی m را بنویسید (مجازی+گرانشی ناشی از m_1 و m_2). بر حسب x و y مختصات دکارتی ذره در دستگاه چرخان که x در راستای اتصال m_1 و m_2 است.

ب) (امتیازی) به ازای مقادیر ساده‌ای (مثلاً در شکل زیر $m_1 = 2m_2$) شکل انرژی پتانسیل در صفحه‌ی (x, y) را به وسیله‌ی هر نرم افزاری که دوست دارید رسم کنید و تصویر را **ضمیمه پاسخ خود** کنید. نقاطی که به نظرتان کاندید نقطه‌ی تعادل این پتانسیل هستند را مشخص کنید!



ج) از ۵ نقطه لاگرانژ، سه تایی آنها روی خط متصل کننده m_1 و m_2 قرار دارد. مکان آن سه را بیابید، یا لااقل معادله‌ای ارائه بدهید که مکان آن‌ها در آن معادله صدق کند.

د) (نمره امتیازی) دو نقطه لاگرانژ دیگر روی خط متصل کننده m_1 و m_2 قرار ندارند. مکان هندسی آن دو نقطه را پیدا کنید.

موفق باشید