

امتحان میان ترم اول درس مکانیک تحلیلی ۲- بهار ۹۸

دانشکده فیزیک- دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ: دوشنبه ۲۰ اسفند ۱۳۹۷

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.
- ساعت شروع امتحان ۸:۳۰ صبح می باشد.
- مدت امتحان ۲ ساعت می باشد.
- این امتحان ۴ امتیاز از نمره کل این درس را تشکیل می دهد.
- امتحان شامل ۳ سوال است:

سوال ۱ - ۲۰ امتیاز، سوال ۲ - ۱۵ امتیاز، سوال ۳ - ۱۵ امتیاز ،

برای دریافت نمره کامل کافی است ۴۰ امتیاز از ۵۰ امتیاز امتحان را کسب کنید.

- جواب بعضی قسمت ها در ادامه سوال داده شده است تا بتوانید مسئله را ادامه دهید.
- به بخش اطلاعات مفید مراجعه کنید

سوال (۱) حرکت نیروی مرکزی و زباله های هسته ای:

فرض کنید می خواهید زباله های هسته ای خود را از زمین خارج کنید. این زباله ها را در یک سفینه قرار داده اید . اکنون دو راه برای خارج کردن آن ها مد نظر است.

(۱) زباله ها را به سمت خورشید بفرستید.

(۲) زباله ها را از منظومه شمسی خارج کنید.

هدف این سوال این است که قدم به قدم شما را به سمت جواب این پرسش راهنمایی کند که کدام یک از دو روش فوق ارزان تر خواهد بود. (منظور از ارزان بودن صرف انرژی اولیه کمتر است.)

الف) قانون سوم کپلر را که ارتباط بین دوره تناوب مدارهای بیضوی با قطر بزرگ بیضی /semi-major axis/ را مشخص می کند، را به دست آورید. این قانون چه ارتباطی با لاگرانژی نیروی مرکزی، مختصه چرخه ای و کمیت های پایسته سیستم دوجسمی در نیروی مرکزی دارد.

ب) ارتباط سرعت مداری زمین و قطر بزرگ مدار زمین حول خورشید را محاسبه و مقدار آن را به دست آورید.

ج) سرعت کمینه سفینه فضایی حامل زباله های هسته ای را طوری به دست آورید که این سفینه از منظومه شمسی خارج شود. راهنمایی: از سرعت مداری زمین می توانید استفاده کنید.

د) یک روش برای ارسال زباله های هسته ای به سمت خورشید این است که از مدارهای انتقالی استفاده کنید. (transfer orbits) بدین منظور خروج از مرکز و قطر بزرگ بیضی مدار انتقالی را به دست آورید.

و) اندازه حرکت زاویه ای مدار جدید و انرژی آن را به دست آورید.

ه) سرعت لازم برای فرستادن زباله ها به خورشید را به دست آورید.

ی) کدام روش انرژی کمتری احتیاج دارد. با چه ایده ای می توان، روش با هزینه بیشتر را، به گزینه مطلوب تری تبدیل کرد.

سوال ۲) یوکاوا

هیدکی یوکاوا 湯川 秀樹 فیزیکدان ژاپنی متولد ۱۹۰۷ در توکیو است. این فیزیکدان ذرات نقش جدی در فهم نیروهای هسته ای قوی داشت. پیش بینی مزون ها (ذراتی که از کوآرک و انتی کوآرک تشکیل شده اند) و سپس وجود پایون و نقش آن در نیروی هسته ای از مهمترین کارهای یوکاواوا است. وی برنده جایزه نوبل ۱۹۴۹ شد.

طبق نظریه یوکاواوا برای نیروهای هسته ای قوی، پتانسیل پروتون و نوترون در هسته به شکل زیر است

$$V(r) = \frac{Ke^{-\alpha r}}{r}$$

که $K < 0$ و $\alpha > 0$ ثابت هستند.

الف) نیروی یوکاواوا را به دست آورده و پتانسیل موثر حرکت یک جسم در نیروی مرکزی یوکاواوا را رسم کرده در مورد حرکت مقید و غیرمقید در این سیستم توضیح دهید.

ب) پایداری مدار دایروی در نیروی مرکزی یوکاواوا برای ذره ای به جرم m را بررسی کنید.

ج) مسیر ذره مقید را در پتانسیل یوکاواوا تا مرتبه اول تقریب $r\alpha^{-1}$ را به دست آورید.

سوال ۳) پروژه آلاینده های هوا

جواب این سوال را به صورت مشخص در سرکلاس درس با یکدیگر بحث کرده ایم. هدف این است که با دانش مکانیک تحلیلی و مفهوم پراکندگی آزمایشی را طراحی کنید که نوع مولکول های آلاینده هوا و میزان نسب آن ها را به دست دهد. در این راستا:

الف) فرض کنید که ذرات آلاینده هوا (ذرات هدف با جرم m_2) در مسئله پراکندگی بسیار سنگین تر از ذرات آلفایی m_1 باشد که شما به سمت آن شلیک می کنید. استدلال کنید که چرا می توانید از سرعت اولیه ذرات هدف صرف نظر کنید. با این فرض سرعت مرکز جرم و سرعت نهایی ذرات پراکنده شده و پرتابی را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید که ارتباط زاویه پراکندگی آلفا با خط برخورد در دستگاه آزمایشگاه Ψ با زاویه پراکندگی در دستگاه مرکز جرم θ با رابطه زیر داده می شود.

$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

ج) نشان دهید که نسبت انرژی جنبشی ذرات خروجی به انرژی جنبشی اولیه به صورت زیر است:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \left[\cos \psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2 \psi} \right]^2$$

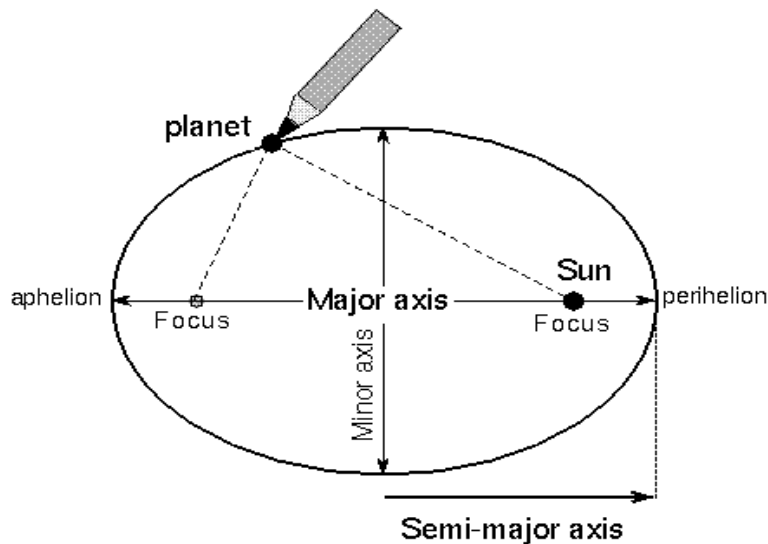
د) در انتها با رسم نمودار نشان دهید که رابطه ای که در قسمت قبل به دست آوردید، به چه ترتیب اطلاعاتی در مورد ذرات آلاینده هوا در اختیار شما قرار خواهد داد (جرم و فراوانی). همچنین در مورد خطاهای اندازه گیری بحث کنید.

اطلاعات مفید:

- کمیت چرخه ای کمیت است که لاگرانژی به صورت صریح به آن کمیت بستگی نداشته باشد
- جرم زمین: $M_e = 6 \times 10^{24} kg$ شعاع زمین: $R_e = 6400 km$
- ثابت گرانش: $G = 6.67 \times 10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2}$
- شعاع خورشید: $R_{sun} = 6.98 \times 10^8 m$
- جرم خورشید: $M_{sun} = 2 \times 10^{30} kg$
- فاصله زمین تا خورشید یک واحد نجومی: $1 AU = 150 Mkm$
- فاصله نپتون تا خورشید: $30 AU$

▪ شکل مدار بیضوی سیاره به دور خورشید: $perihelion = semi\ major\ axis * (1 - eccentricity)$

$aphelion = semi\ major\ axis * (1 + eccentricity)$



- معادله حرکت مقاطع مخروطی در پتانسیل نیروی مرکز $U(r) = \frac{k}{r}$ با جرم کاهیده μ مختصات قطبی (r, θ) به صورت زیر است

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta$$

کمیت های ثابت معادله فوق برابرند با:

$$\alpha = \frac{\ell^2}{\mu k}; \quad \epsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}$$

با احترام

شانت باغرام