

تمرین مکانیک تحلیلی ۱ - پاییز ۹۳

سری نهم - موعده تحویل: روز امتحان پایان ترم

سوال (۱)

برای ذره ای به جرم m در یک بعد (x)، لاگرانژین زیر را در نظر بگیرید، ثابت های λ, ω, m حقیقی و مثبت هستند.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)e^{\lambda t}$$

الف) معادلات حرکت را بدست آورید.

ب) با تعیین انواع نیروهایی که ذره تحت تاثیر آن قرار دارد، معادله ی حرکت را تفسیر کنید.

پ) تکانه ی تعمیم یافته را پیدا کنید، و با استفاده از آن تابع هامیلتونین را به دست آورید.

ت) آیا هامیلتونین ثابت حرکت است؟ آیا انرژی پایسته است؟ توضیح دهید.

ث) با شرایط اولیه زیر برای زمان های خیلی زیاد رفتار مجانبی $x(t)$ به چه شکلی است؟

$$\dot{x}_{(0)} = v_0 \quad x_{(0)} = 0$$

سوال (۲)

یک الکترون غیرنسبیتی به جرم m و بار $-e$ ، در یک مگنتون استوانه ای بین یک سیم به شعاع a و پتانسیل الکتریکی منفی $-\phi_0$ و یک رسانای استوانه ای هم مرکز با آن، که دارای شعاع R و پتانسیل صفر است، حرکت می کند، یک میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت B به موازات محور وجود دارد، از مختصات استوانه ای استفاده کنید. پتانسیل برداری مغناطیسی و پتانسیل اسکالر الکتریکی را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\Phi = -\phi_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\ln\left(\frac{a}{R}\right)} \quad \vec{A} = \frac{1}{2}Br\hat{e}_\theta$$

الف) هامیلتونین و لاگرانژین را بنویسید.

ب) نشان دهید سه ثابت حرکت وجود دارند، این ثابت ها را بنویسید، و درمورد حرکت هایی که ممکن است رخ دهند، بحث کنید.

پ) فرض کنید اگر یک الکترون سیم داخلی را با سرعت اولیه صفر ترک کند، اندازه ای از میدان مغناطیسی (B_c) وجود دارد که به ازای $(B \leq B_c)$ الکترون می تواند به استوانه ی خارجی برسد، و به ازای $(B > B_c)$ الکترون به استوانه ی خارجی نمی رسد. (B_c) را پیدا کنید و شکلی از مسیر الکترون برای حالت رسم کنید می توان فرض کرد $R \gg a$.

سوال ۳)

سیستمی متشکل از دو ذره $m_2 = m_1$ را در نظر بگیرید که به وسیله ی طنابی به طول L به یکدیگر متصل شده اند، به طوری که m_2 مقید به باقی ماندن بر روی سطح یک مخروط قائم با زاویه راس α می باشد، و m_1 آزادانه در درون مخروط آویزان است، مطابق شکل طناب از درون سوراخ واقع بر راس مخروط عبور کرده است. از اصطکاک صرفه نظر کنید.

الف) دستگاه مختصات تعمیم یافته ای مناسبی برای این سیستم معرفی کنید.

ب) معادله ی لاگرانژین سیستم و معادلات حرکت هر یک از مختصات تعمیم یافته را بنویسید.

پ) هامیلتونین سیستم را بنویسید.

ت) بسامد زاویه ای ω_2 را در حالتی که m_2 در یک مدار دایره ای حرکت می کند، بر حسب متغیرهای مسئله بیان کنید.

