تمرین مکانیک تحلیلي ۱ - پاییز ۹۳

سري اول - موعد تحویل: یکشنبه ۲۷ مهر

۱) با توجه به تعریف گروه،

الف) نشان دهید که دوران در ۳ بعد تشکیل گروه مي دهد.

ب) سپس نشان دهید که دوران یک گروه SO(3) مي باشد.

ج)سپس بحث کنید که متعامد بدون این گروه چگونه باعث مي شود که طول یک بردار کمیت ناوردا باشد.

د) آیا شرط تعامد گروه دوران را مي توان با فرض ناوردایي طول بردار نشان داد؟

۲) اگر نیروي F به صورت زیر معلوم باشد

$$F = (x^2 + y^2 + z^2)^2(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)$$

عبارت هاي زیر را بیابید:

الف) $\nabla . F$

ب) $\nabla \times F$

ج) پتانسیل اسکالر $\varphi(x, y, z)$ به گونه ایي که $F = -\nabla\varphi$

۳) در این مسئله مي خواهیم دوره اي کوتاه بر روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ خطي داشته باشم و همچنین روشي خاص را براي حل معادلات غیر خطي ارائه دهیم.

الف- جواب معادله دیفرانسیل $\dot{x} = Ax$ را که در آن A یک ثابت مي باشد را بدست آورده و نمودار x(t) را به ازاي یک شرط اولیه دلخواه رسم کنید.

اکنون معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$a\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\theta = 0 \qquad I$$

که در رابطه فوق a,b,c ۳ ثابت حقیقي مي باشند.

براي حل معادله فوق متغیر هاي x_2 وx_1 را به صورت $x_1 = \theta$ و $x_2 = \dot{\theta}$ تعریف مي کنیم.

ب- معادله دیفرانسیل مربوط به $\boldsymbol{\theta}$ را بر حسب x_2 وx_1 و مشتقات آن ها باز نویسي کنید.

پ- بردار x را به صورت $\vec{\mathrm{x}} = \binom{x_1}{x_2}$ تعریف مي کنیم. نشان دهید که :

$$\vec{\dot{x}} = A\vec{\mathrm{x}}$$

که در رابطه فوق A یک ماتریس ثابت است که باید تعیین کنید.

ت- ویژه مقادیر و ویژه بردار هاي ماتریس A را بدست آورید.

ث- با کمک جواب قسمت بالا کلي ترین جواب را براي $\vec{\mathrm{x}}(t)$ را بدست آورید و از روي آن جواب $\theta(t)$ را تعیین کنید.

ج- با در نظر گرفتن یک شرط اولیه دلخواه، نمودار x_2 بر حسب x_1 را به ازاي ۳ شرط زیر رسم کنید.

- $b^2 > 4ac$
- $b^2 = 4ac$
- $b^2 < 4ac$

اکنون فرض کنید که به معادله مربوط به θ یک جمله به صورت زیر اضافه کنیم

$$a\ddot{\theta} + c\theta + \varepsilon\theta^3 = 0 \qquad II$$

براي سادگي ضریب b را برابر ۰ گذاشتیم.

حال مي خواهیم معادله فوق را به ازاي مقادیر کوچک ε حل کنیم.براي اینکار ۲ فرض زیر را در نظر بگیرید.

- توان هاي ۳ به بالاي ε را برابر ۰ مي گیریم
- جواب معادله دیفرانسیل فوق را یک تابع پیوسته و مشتق پذیر از پارامتر ε فرض مي کنیم

با توجه به ۲ فرض فوق مي توان نوشت :

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \varepsilon\,\theta_1(t) + \varepsilon^2\theta_2(t)$$

که در رابطه فوق θ_0, θ_1 وθ_2 توابعي متسقل از ε و وابسته به زمان (چرا؟) مي باشند که مي خواهیم تعیین کنیم.

ح- با توجه به فرض فوق معادله دیفرانسیل II را بر حسب θ_0, θ_1 وθ_2 باز نویسي کنید.

اکنون تقاضا مي کنیم که معادله اي که در قسمت ح بدست آورده اید به ازاي بازه اي پیوسته از ε بر قرار باشد. بنابراین مي توان قاعده زیر را در نظر گرفت :

$$if\ for\ \varepsilon \in [\alpha, \beta] \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varepsilon^n = 0 \quad => \quad \forall\, n\,; \quad A_n = 0$$

خ- اکنون در جواب قسمت ح با مساوي قرار دادن جملات مرتبه ۰ نسبت به ε ؛ $\theta_0(t)$ را تعیین کنید و نشان دهید جواب بدست آمده با جواب قسمت ث هم خواني دارد.

د- $\theta_1(t)$ را تعیین کنید.

ذ-$\theta_2(t)$ را تعیین کنید.

۴) مقدار انتگرال هاي زیر را بر حسب r و مشتقات آن محاسبه کنید:

توجه : منظور از r اندازه ي ، و $\mathbf{r}$ بردار است، همین تفاوت در مشتقات آن هم هست.

$$\int (2r.\dot{r} + 2\dot{r}.\ddot{r})dt$$

$$\int (\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2})dt$$

$$\int r \times \ddot{r} dt$$