

تمرین سری ۸- مکانیک تحلیلی

(۱) عبارت های زیر را اثبات کنید.

(الف)

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

(ب)

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

(ج)

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(د)

$$\{L_1, L_2\} = L_3$$

از راهنمایی های زیر استفاده کنید:

$$\bullet \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\bullet \{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha \{f, g\} + \beta \{g, h\} \quad \alpha, \beta \in R$$

$$\bullet \{q_i, q_j\} = 0 \quad \& \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \& \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} \{L_1, L_2\} &= \{r_2 p_3 - r_3 p_2, r_3 p_1 - r_1 p_3\} = \{r_2 p_3 - r_3 p_1\} - \{r_2 p_3 - r_1 p_3\} - \{r_3 p_2 - r_3 p_1\} + \{r_3 p_2 - r_1 p_3\} \\ (*) &= \{r_2 p_3 - r_3 p_1\} = r_2 \{p_3, r_3 p_1\} + \{r_2 - r_3 p_1\} p_3 = \\ &= r_2 r_3 \{p_3, p_1\} + r_2 p_1 \{p_3, r_3\} + r_3 p_3 \{r_2, p_1\} + \{r_2, r_3\} p_1 p_3 = -r_2 p_1 \end{aligned}$$

(۲) با استفاده از بردار Rung_lenz عبارت های زیر را ثابت کنید:

(الف)

$$\{L_a, A_b\} = \varepsilon_{abc} A_c$$

(ب)

$$\{A_a, A_b\} = -\frac{2}{m} \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{r} \right) \varepsilon_{abc} L_c = -\frac{2}{m} H \varepsilon_{abc} L_c$$

ج) با فرض اینکه هر یک از L_a و L_b و L_c ، ثابت حرکت باشند، یعنی:

$$\{L_a, H\} = 0$$

$$\{L_b, H\} = 0$$

$$\{L_c, H\} = 0$$

نشان دهید بردار A نیز ثابت حرکت است.