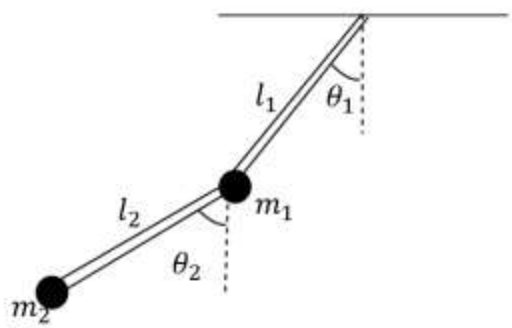
تمرین سری ۶ و ۷ درس مکانیک تحلیلی ۱ پاییز ۹۸
دانشکده فیزیک-دانشگاه صنعتی شریف
تاریخ تحویل: روز امتحان مکانیک تحلیلی

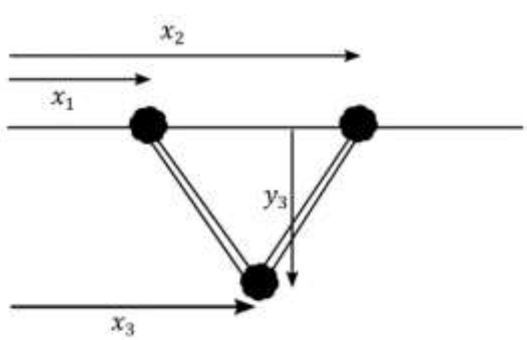
لطفا جواب تمرین را اسکن و به آدرس ایمیل TA.baghram.1@gmail.com ارسال کنید.
در عنوان ایمیل، نام درس، شماره دانشجویی و شماره سری تمرین را لحاظ بفرمایید.

۱- قرصی به شعاع R بدون لغزش در داخل سهمی $y = ax^2$ می غلتد. معادله قیدی را بیابید. شرطی را بیان کنید که به قرص اجازه می دهد چنان بغلتد که با سهمی در یک و فقط یک نقطه مستقل از موضع قرص تماس داشته باشد.

۲- رای دو آونگ متصل به هم مطابق شکل، لاگرانژی را نوشته و معادلات حرکت را استخراج کنید. نخست برای یافتن جمله‌ی جنبشی، توصیه می‌شود به مختصات دکارتی رفته و بازگردید. شتاب گرانش g است.



۳- مطابق شکل سه جرم m در اختیار داریم که دو جرم نخست روی ریلی بدون اصطکاک لیز میخورند و جسم سوم بوسیله‌ی دو میله به دو جرم نخست لولا شده است. طول هر میله ℓ و شتاب گرانش g است. مختصات سه جرم در شکل زیر مشخص شده است.



الف) رابطه‌ی میان x_3 و x_1و x_2 چیست؟ لاگرانژی سیستم را برحسب x_1 و x_2 و y_3 و مشتقات آن‌ها بنویسید.

ب) در این مرحله هنوز از یک قید دیگر استفاده نکرده‌ایم و آن هم رابطه‌ی میان y_3 با مختصات x_1 و x_2 است. این رابطه را به فرم یک قید: $F(y_3, x_1, x_2) = 0$ در آورید. حال قصد داریم این قید را به طور دستی وارد لاگرانژی کنیم. به این منظور از تکنیک ضریب لاگرانژ بهره می‌بریم که به این صورت است که پارامتر جدید $\lambda(t)$ را به فضای پارامترها افزوده و در لاگرانژی جمله‌ی $\lambda\, F(y_3, x_1, x_2)$ را وارد می‌کنیم.

معادلات حرکت چهار پارامتر y_3, x_1, x_2 و λ را بنویسید. نشان دهید با در نظر گرفتن این چهار معادله قید براورده می‌شود.

ج) این چهار معادله را با حذف λ و جاگذاری معادله‌ی قید در دیگر معادلات، ساده کنید.

۴- در این مساله می‌خواهیم نشان دهیم اگر تعداد زیادی نقطه با چگالی یکنواخت در فضای فاز یک سیستم (در مساله‌ی ما تک بعدی) رها کرده باشیم، با گذشت زمان، چگالی این نقاط ثابت می‌ماند(قضیه‌ی لیوویل) بدین منظور فرض می‌کنیم زمان کوچک dt بگذرد. در این صورت نقطه‌ای که پیش از این در فضای فاز در مختصات (q, p)قرار داشته است حال تحت تبدیل $A(dt)$به نقطه‌ی جدید $(\tilde{q}, \tilde{p})$منتقل می‌شود. هدف ما این است که نشان دهیم تبدیل A یک تبدیل حجم نگه‌دار است و به همین سبب چگالی را تغییر نمی‌دهد.

حجم یک مربع دیفرانسیلی در فضای فاز پیش از اعمال تبدیل $dpdq$ بوده است. پس از اعمال تبدیل، حجم آن به $Det(\mathcal{J})dpdq$ تبدیل می‌شود که $\mathcal{J}$ ماتریس جاکوبی تبدیل است:

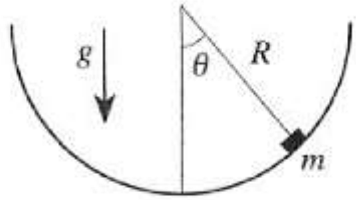
$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \partial\tilde{q}/\partial q & \partial\tilde{q}/\partial p \\ \partial\tilde{p}/\partial q & \partial\tilde{p}/\partial p \end{pmatrix}$$

پس برای اثبات مدعا باید نشان دهید $Det(\mathcal{J}) = 1$.

الف) $\tilde{q}$ و $\tilde{p}$ را به کمک معادلات هامیلتون بدست آورید. فرض کنید سیستم ما تحت یک هامیلتونی تحول زمانی پیدا می‌کند. این کار را تا مرتبه‌ی نخست تقریب کوچکی dt انجام دهید.

ب) ماتریس جاکوبی را تشکیل دهید و نشان دهید تا مرتبه‌ی نخست تقریب کوچکی dt دترمینان آن ۱ است.

۵- جسمی به جرم m درون یک نیم کره‌ی بدون اصطکاک حرکت می‌کند. شعاع نیم کره R است و گرانش در راستای $-z$ و ازین پس از مختصات قطبی برای توصیف مکان ذره استفاده کنید.



الف) لاگرانژی حرکت را بنویسید.

ب) معادلاتی برای تکانه‌های تعمیم یافته p_θ و p_ϕ بیابید.

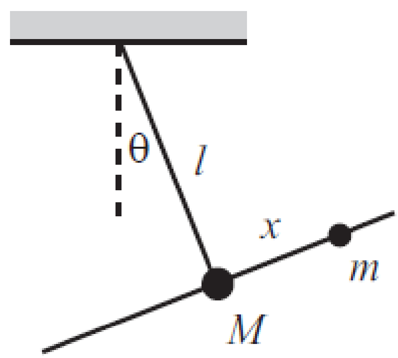
ج) هامیلتونی این ذره و معادلات هامیلتون را نویسید.

د)معادله‌ی دیفرانسیل درجه دویی برای θ از معادلات فوق بدست آورید.

ه) اگر در تمام لحظات $\theta = \theta_0$ و $\dot{\theta} = 0$ سرعت جسم را محاسبه کنید.

و) اگر در لحظه‌ی $t = 0$ داشته باشیم: $\theta = \theta_0$ و $\dot{\theta} = 0$ و $\dot{\phi} = 0$ ماکسیمم سرعت در زمان‌های بعدی را محاسبه کنید.

۶- جسمی به جرم M مطابق شکل به انتهای میلیه بدون جرمی طول l متصل شده است و در بالا لولا شده است. جرم m مطابق شکل می تواند آزادنه و بدون اصطکاک در طول میله به اندازه کافی بلند و بدون جرمی حرکت کند. کل سیستم آزادنه حول لولا می چرخد. معادله حرکت را به ازای θ و x بیابید. همچنین مودهای نرمال را برای وقتی که θ و x کوچک هستند. بیابید.



۷- ذره ای به جرم پ تحت تاثیر نیروی زیر در یک بعد حرکت می کند:

$$F(x,t) = \frac{k}{x^2} e^{-(\frac{t}{\tau})}$$

که در آن k و τ ثابت های مثبت‌اند. توابع لاگرانژی و هامیلتونی را محاسبه کنید. هامیلتونی و انرژی کل را مقایسه و در خصوص پایستگی انرژی برای این سیستم بحث کنید.

۸- تابعی از دو متغیر x_1, x_2 و در نظر بگیرید: $\mathcal{F}(x_1, x_2)$. تبدیل لژاندر این تابع برای متغیر x_1 را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$(L_1\mathcal{F})(\tilde{x}_1, x_2) := Max_{x_1}(\tilde{x}_1 x_1 - \mathcal{F}(x_1, x_2))$$

که در سمت راست این تساوی ماکسیمم گیری روی x_1 انجام شده است. یعنی مقدار مشخص $x_1^{(0)}$ای وجود دارد که:

$$Max_{x_1}\left(\tilde{x}_1 x_1 - \mathcal{F}(x_1, x_2)\right) = \tilde{x}_1 x_1^{(0)} - \mathcal{F}\left(x_1^{(0)}, x_2\right)$$

الف) رابطه‌ای برای $x_1^{(0)}$ بنویسید.

ب) تبدیل لژاندر $\mathcal{F}(x) = e^x$ را بیابید.

ج)نشان دهید:

$$(L_1 L_1 \mathcal{F})(x_1, x_2) = \mathcal{F}(x_1, x_2)$$

د)با توجه به تعریف‌های یاد گرفته شده نشان دهید: $L_2\big(\mathcal{L}(q,\dot{q})\big) = \mathcal{H}(q,p)$ که $\mathcal{L}$ لاگرانژی، $\mathcal{H}$ همیلتونی و L_2 تبدیل لژاندر روی متغیر دوم لاگرانژی($\dot{q}$) است.

۹- در این مساله قصد داریم ژئودزی یا همان خم کمترین طول را بر روی سطح کره‌ای به شعاع R پیدا کنیم. تمام نقاط روی کره در مختصات کروی با دو پارامتر آشنای (ϕ,θ)مشخص می‌شوند.

الف) فاصله‌ی میان دو نقطه به مختصات (ϕ,θ)و $(\phi+d\phi,\theta+d\theta)$که از هم به طور دیفرانسیلی فاصله دارند dsچقدر است؟

ب) خمی را روی کره در نظر بگیرید که معادله‌ی آن به صورت $\phi=f(\theta)$است. آغاز این خم را در $\phi=0,\theta=0$ و پایان آن را در $\phi=\phi_0,\theta=\theta_0$ در نظر بگیرید و فرض کنید تابع fتابعی تک مقداری است. طول خم را به صورت انتگرالی بنویسید.

ج)به کمک حساب وردش‌ها معادله‌ی دیفرانسیلی برای $f(\theta)$ وقتی طول خم مینیمم است بیابید و سعی کنید معادله‌ی دیفرانسیل را حل کنید و معادلاتی برای ثوابت انتگرال گیری موجود ارائه دهید.

۱۰- اصل فرما در اپتیک هندسی بیان می‌کند، که نور همواره برای رفتن از نقطه‌ی A به B کوتاه ترین مسیر را انتخاب می‌کند. پارامتر n (ضریب شکست) برای یک محیط شفاف به معنای این است که سرعت نور در آن محیط c/nاست. حال فرض کنید نور می‌خواهد در محیطی دو بعدی$\mathrm{x}-\mathrm{y}$ که ضریب شکست آن تابع معلومی از xاست $n(x)$ حرکت کند. معادله‌ی مسیر نور را به صورت $y=y(x)$در نظر بگیرید. زمان رسیدن از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر را به صورت انتگرالی بنویسید و به کمک وردشگیری برای مینیمم کردن زمان، قانون شسکت (اسنل) را اثبات کنید:

$$\sin\theta_1\ n_1 = \sin\theta_2\ n_2$$

۱۱- جسمی را در نظر بگیرید که با لاگرانژی زیر در فضای دو بعدی حرکت می‌کند:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{A}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

معادلات لاگرانژ برای این جسم را بنویسید، و تلاش کنید با ترکیب این دو معادله به معادله‌ای به فرم: $\partial_t\big(S(x,y,\dot{x},\dot{y})\big)=0$ برسید. به این معادله معادله‌ی پایستگی برای کمیت S می‌گویند. قانون نوتر بیان می‌کند هر کمیت پایسته در تئوری با یک تقارن متناظر است، چه تقارنی در لاگرانژی اولیه وجود داشت، که مسبب این پایستگی شد؟

۱۲- ژئودزی بر روی کره‌ی دو بعدی

کره‌ای به شعاع واحد در نظر بگیرید که سطح آن را با مختصات قطبی کروی θ وϕ مختصه بندی کرده‌ایم.
دو نقطه‌ی مجاور هم روی این کره به مختصات (θ,ϕ) و $(\theta+d\theta,\phi+d\phi)$ در نظر بگیرید.
الف) فاصله‌ی میان این دو نقطه چقدر است؟(رفتن به مختصات دکارتی می‌تواند چاره‌ساز باشد)

یک مسیر بر روی این کره در نظر بگیرید، یک خم، که با پارامتر t مشخص می‌شود به صورت: $(\theta(t),\phi(t))$. این خم میان دو نقطه‌ی مشخص A و B قرار گرفته‌است. فرض کنید نقطه‌ی A متناظر با t=0و نقطه‌ی B متناظر با t=1 باشد. می‌خواهیم این خم، کوتاه ترین فاصله‌ی ممکن میان این دو نقطه را داشته باشد.
ب)طول خم میان دو نقطه‌ی A و B را به صورت انتگرالی از توابع : $(\theta(t),\phi(t))$و مشتقات‌شان بنویسید.

ج)معادلات دیفرانسیلی حاکم بر خم کوتاه‌ترین طول را بدست‌آورید(معادله‌ی ژئودزی)

۱۳ – تصحیح نسبتی لاگرانژی

لاگرانژی یک ذره نسبیتی (ذره‌ای که با سرعت قابل مقایسه با سرعت نور در حرکت است) که در پتانسیل $V(x)$در زیر داده شده است:

$$L = mc^2 - mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} - V(x)$$

که c سرعت نور است.

الف) نشان دهید در حد سرعت‌های کوچک این لاگرانژی معادل با لاگرانژی آشنای یک ذره در پتانسیل $V(x)$ است.
ب) نخستین تصحیح غیر صفری که $\dot{x}/c$ به لاگرانژی فوق می‌دهد را بیابید.
ج)معادله‌ی حرکت را با فرض وجود این تصحیح بدست آورید.

در باب اعمال دستی تقارن‌ها

نیروی مرکزی با پتانسیل $V(r)$ در نظر بگیرید و برای ذره ای به جرم m که در صفحه‌ی دو بعدی حول این پتانسیل می‌گردد، لاگرانژی را در مختصات قطبی بنویسید.

الف) معادله حرکت در راستای rرا با استفاده از لاگرانژی بدست آورید. این معادله را با نتیجه‌ی قانون ۲ نیوتون مقایسه کنید.
ب) با تعریف کمیت $l = r^2\dot{\theta}$ و استفاده از معادله لاگرانژ در راستای چه قانون پایستگی‌ای به دست می‌آید؟
ج) اگر بخواهیم از نتیجه‌ی قسمت ب استفاده کنیم، و در لاگرانژی به جای استفاده از کمیت از تنها lاستفاده کنیم، لاگرانژی را بازنویسی کنید.
ه)لاگرانژی بدست آمده در قسمت ج را ملاک قرار داده و فرایند قسمت الف را برای آن تکرار کنید، نتایج را مقایسه کنید!

دست‌آورد ما ازین محاسبه این است که اعمال دستی تقارن حاصل از قسمت ب به داخل لاگرانژی، دیگر لاگرانژی را برای محاسبه‌ی صحیح معادلات حرکت از اعتبار می‌اندازد. ولی چرا این گونه است؟ اگر آن تقارن بالاخره از معادلات حرکت حاصل شود، چرا باید اعمال آن درون لاگرانژی کار را خراب کند؟ حتما روی آن فکر کنید.