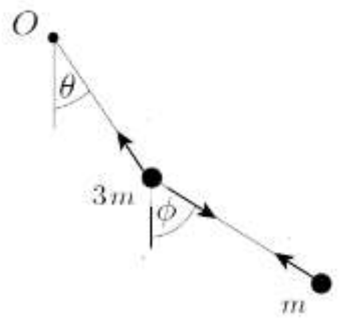
تمرین سری ۴– مکانیک تحلیلی ۱ / مهلت تحویل: دوشنبه ۱۱ آذر

۱- پاسخ یک نوسانگر خطی را به تابع وادارنده زیر به دست اورید

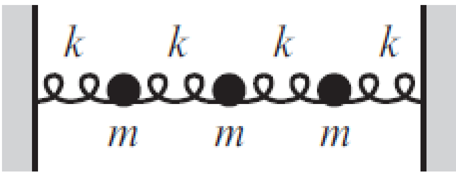
$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a\sin\omega t & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

۲- جسمی با جرم 3m توسط ریسمان بدون جرمی به طول a به نقطه O ثابت شده است. جسم دومی با جرم m توسط ریسمان بدون جرم به طول a به جرم اول متصل شده است. الف) معادلات حرکت دو جسم را بر حسب θ و φ بنویسید. ب) فرکانس‌های اصلی سیستم و فرم معادلات ارتعاشی متناظر آنها را بنویسید.



۳- دو جسم مشابه به جرم m مطابق شکل محدود به حرکت در یک مسیر دایره‌ای هستند. این دو جرم توسط دو فنر مشابه k به هم متصل هستند. اگر به یکی از جرم‌ها نیروی $F_d \cos \omega_d t$ اعمال گردد. جواب خصوصی معادلات حرکت را بیابید.

۴- چهار فنر مشابه و سه جرم مشابه بین دو دیوار به صورت شکل زیر نصب شده‌اند. مودهای نرمال را بیابید.



۵- برای ارتعاشات کوچک، دوره تناوب آونگ تقریبا برابر $T \cong 2\pi\sqrt{l/g}$ است که از مستقل از زاویه اولیه θ_0 می‌باشد. برای ارتعاشات محدود با استفاده از عبارت $dt = dx/v$

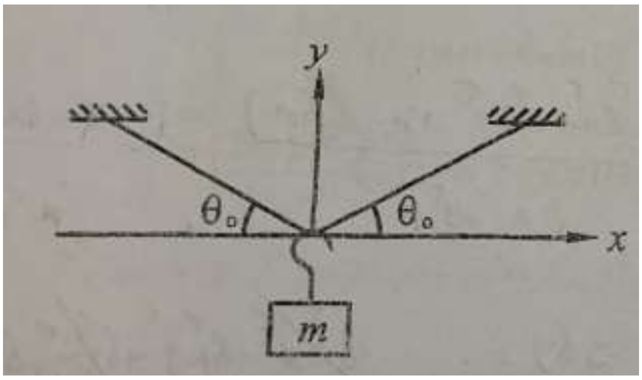
$$T = \sqrt{\frac{8l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}}$$

همچنین مقدار تقریبی عبارت بالا را تا مرتبه دو θ_0 محاسبه کنید.

۶- طنابی به طول l بین دو نقطه‌ی آویز، آویزان گردیده است. جسمی به جرم پ با یک قلاب بدون اصطکاک که به راحتی روی طناب می‌لغزد در وسط طناب در حال تعادل آویزان است. در این حالت دو تکه طناب با افق زاویه θ_0 می‌سازد حالا به جسم ضربه کوچکی وارد می‌کنیم به طری که جسم در حالی که همچنان روی طناب بای مانده شروع به وسان می‌کند. به پرسشهای زیر فقط بر حسب پارامترهای $\theta_0, l, m\ , g$ پاسخ دهید.

الف) ثابت کنید در اخلالات کوچکِ جابه‌جایی در راستای y در مقابل جابه‌جایی در راستای x قابل صرفنظر است.

ب) فرکانس نوسانات کوچک جسم را به دست آورید.



۷- آرایه‌ای Nتایی از ذرات به جرم m روی یک حلقه که بوسیله‌ی فنرهایی به طول اولیه‌ی l_0، ثابت فنر kبه هم متصل شده و با فاصله‌ی a از هم قرار گرفته‌اند و هر جسم فقط می‌تواند سر جای خود بالا و پایین برود و ارتفاع y_iکسب کند را در نظر بگیرید، iاندیس شمارنده‌ی ذرات است. فرض کنید این آرایه بسته است، یعنی ذره‌ی شماره‌ی Nاز یک طرف به ذره‌ی $N-1$و از سوی دیگر به ذره‌ی 1 متصل است.

الف) معادله‌ی حرکت ذره‌ی iام را بر حسب مکان این ذره و مکان دو همسایه‌اش y_i و y_{i+1} و y_{i-1} بنویسید.(این کار را تا کوچکترین مرتبه نسبت به y_iها انجام دهید.)

معادلات حرکت بدست آمده را می‌توان در ماتریسی به فرم زیر جمع آوری کرد:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

که Aیک ماتریس Nدر N است. فرم کلی این ماتریس را بنویسید. در نقاط سر و ته آرایه دقت کافی را به خرج دهید.

برای پیدا کردن مدهای نوسانی این سیستم باید علی‌الاصول بتوان ماتریس فوق را قطری کرد. در نگاه اول این کار غیر ممکن به نظر می‌رسد. امّا می‌توان حدس‌هایی زد. مختصات جدیدی برای توصیف این سیستم به کار می‌بریم به فرم زیر:

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} y_j \quad , \quad R_{ij} = a\, Cos\left(\frac{2\pi j i}{N}\right)$$

که این تبدیل خطی مختصات را با یک ماتریس تبدیل R نمایش داده‌ایم. a نیز یک ثابت است.

ب) نشان دهید ماتریس R متعامد است، یعنی: $R_{im}R_{mj} = \delta_{ij}$. ثابت aرا بیابید.

[راهنمایی: $\sum_{i=1}^{N} Cos(\frac{2\pi j}{N} i) = 0 \quad if\ j \neq 0$]

ج) معادله‌ی حرکت قسمت الف را به مختصات x ببرید و $\ddot{x}_i$را برحسب x_jها بدست آورید. نشان دهید در این مختصات معادلات حرکت قطری اند و $\ddot{x}_i = -{\omega_i}^2 x_i$.ω_i را که فرکانس نوسانات مد نورمال iام است را بیابید.

د) در حد $N \to \infty$و $a, l_0 \to 0$ آیا جواب‌ها همانگونه که انتظار دارید هستند؟