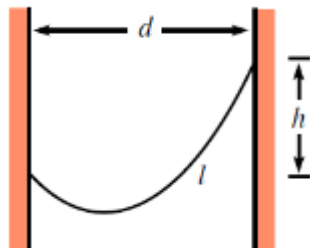


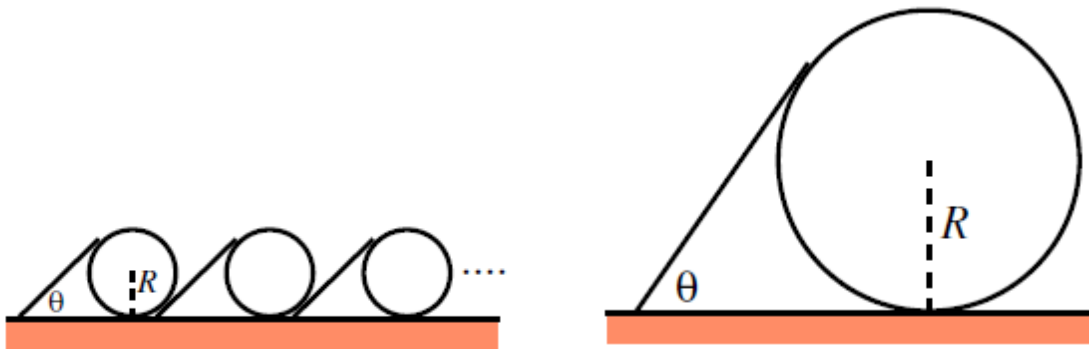
تمرین سری ۱ درس مکانیک تحلیلی ۱ پاییز ۹۸  
دانشگاه فزیک - دانشگاه صنعتی شریف  
تاریخ تحویل: دوشنبه ۱۳ آبان ۱۳۹۸

لطفا جواب تمرین را اسکن و به آدرس ایمیل [TA.baghram.1@gmail.com](mailto:TA.baghram.1@gmail.com) ارسال کنید.  
در عنوان ایمیل، نام درس، شماره دانشجویی و شماره سری تمرین را لحاظ بفرمایید.

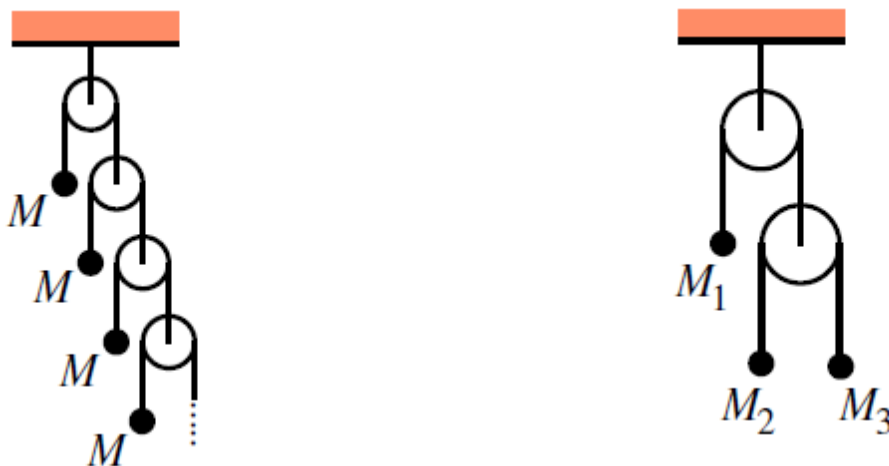
- ۱- ذره‌ای تحت تاثیر جاذبه و مقاومت هوا سقوط می‌کند، سرعت بر حسب مکان را برای زمانی که مقاومت هوا (الف)  $\alpha v$  و (ب)  $\beta v^2$  باشد محاسبه نمایید؟
- ۲- یک بلوک به جرم  $m$  بر روی میز بدون اصطکاکی می‌لغزد و محدود به حرکت در داخل دایره‌ای به شعاع  $l$  شده است. در زمان  $t = 0$  بلوک در حال حرکت در داخل حلقه و با سرعت  $v_0$  است. اگر ضریب اصطکاک بین بلوک و حلقه برابر  $\mu$  باشد، (الف) سرعت و (ب) مکان بلوک را بر حسب زمان بیابید؟
- ۳- زنجیری با جرم یکنواخت به صورت شکل زیر بین دو دیوار آویخته شده است. معادله شکل زنجیر را بیابید؟



- ۴- (الف) یک میله با چگالی خطی  $\rho$  بر روی یک دایره با شعاع  $R$  قرار دارد. میله با سطح افق زاویه  $\theta$  می‌سازد. انتهای بالایی میله مماس بر دایره است و در تمامی نقاط تماس اصطکاک وجود دارد. با فرض اینکه سیستم ثابت می‌ماند اصطکاک بین زمین و دایره را بیابید. (ب) حال فرض کنید بی نهایت میله و دایره مطابق شکل زیر داریم (انتهای بالایی میله مماس با دایره‌ها) با این تفاوت که کلیه سطوح بدون اصطکاک بوده و هر میله به زمین لولا شده است. نیروی عمودی بین دایره‌ها و میله‌ها در حد بی نهایت تعداد دایره‌ها چقدر است؟ (فرض کنید اولین دایره به زمین چسبیده است)



۵- ماشین آتوود الف) یک قرقره دوتایی بدون وزن به سه جرم مطابق شکل متصل است. شتاب هر یک از اجرام را بیابید؟ ب) یک ماشین آتوود بی نهایت را در نظر بگیرید، یک سر قرقره‌ها به جرم‌های برابر متصل است و سر دیگر مطابق شکل به قرقره بعدی متصل است. اگر از حالت سکون وزنه‌ها را رها کنیم، شتاب بالاترین جرم را محاسبه کنید؟



۶- توپی را با سرعت  $v_0$  به سمت بالا پرتاب می‌کنیم اگر نیروی مقاومت هوا  $max$  باشد سرعت توپ در هنگام برخورد با زمین چقدر است؟ نسبت به حالت خلاء، توپ زمان کمتر یا بیشتری در هوا بوده است؟  
 ۷- توپی را با سرعت  $v$  از ارتفاع صفر با زاویه  $\theta_0$  پرتاب می‌کنیم. که در آن زاویه، توپ بیشترین فاصله را طی می‌کند. (طول منحنی) نشان دهید که این زاویه از رابطه زیر تبعیت می‌کند و مقدار عددی آن را با استفاده از کامپیوتر محاسبه نمایید.

$$1 = \sin\theta_0 \ln\left(\frac{1 + \sin\theta_0}{\cos\theta_0}\right)$$

۸- قصد داریم عمومی‌ترین شکل مکانیکی که به کمک دیدگاه انرژی می‌توان ساخت را قدم به قدم بررسی کنیم. فرض کنید در فضای سه بعدی  $n$  ذره داریم. که مولفه‌ی  $i$  مکان ذره‌ی  $a$  را با  $q_i^a(t)$  نشان می‌دهیم. انرژی کل این سیستم را در یک آنساتز بخصوص (با تعدادی فرض‌های ساده‌کننده) این‌گونه می‌نویسیم:

$$E = K(q_i^a(t)^{(1)}, q_i^a(t)^{(2)}, \dots) + U(q_i^a(t))$$

جمله‌ی نخست  $K$  (انرژی جنبشی) در حالت کلی تابعی از تمام مشتقات اول و دوم و ... تمام مولفه‌های مکان تمام ذرات است ( $q_i^a(t)^{(f)}$  به معنای مشتق  $f$  ام زمانی  $q_i^a(t)$  است). و جمله‌ی دوم  $U$  (انرژی پتانسیل) تابعی از تمام مولفه‌های مکان تمام ذرات است. الف) برای  $K$  کلی‌ترین بسط تیلور که تمام مشتقات تمام مولفه‌های تمام ذرات را با هم قاطی می‌کند را بنویسید.

ب) فرض تقارن انعکاس زمانی:  $t \rightarrow -t$  را اعمال کنید و بسط فوق را محدود تر کنید.

ج) فرض تقارن انعکاس مکانی:  $q_i^a(t) \rightarrow -q_i^a(t)$  را اعمال کنید و بسط فوق را محدود تر کنید

د) فرض این که انرژی جنبشی هر ذره مستقل از وضعیت ذرات دیگر است را اعمال کنید و بسط را ساده‌تر کنید.

ه) فرض این که تمام برهمکنش‌ها دو به دو است، چه شرطی روی تابعیت  $U$  می‌گذارد؟

و) فرض تقارن جابجایی:  $q_i^a(t) \rightarrow q_i^a(t) + A_i$  که  $A_i$  یک بردار ثابت است و فرض اینکه تعویض کردن دو ذره با هم تأثیری روی برهمکنش میان آن دو ذره ندارد، چه تأثیری روی تابعیت  $U$  می‌گذارد؟

ز) فرض تقارن دورانی:  $q_i^a(t) \rightarrow R_{ij} q_j^a(t)$  که  $R$  یک ماتریس دوران دلخواه سه بعدی است، چه شرطی روی بسط  $K$  و تابعیت  $U$  می‌دهد؟

ح) با فرض کار کردن در انرژی‌های کم، تنها جمله‌ی اول غیر ثابت  $K$  را نگه دارید.

ط) با مشتق‌گیری نسبت به زمان، و این فرض که در یک لحظه می‌توان سرعت هر کدام از ذرات را به طور دلخواه انتخاب کرد و این نباید روی معادله‌ی دیفرانسیل قائی تأثیری بگذارد، قانون دو نیوتون را برای یکی از ذرات استخراج کنید، و نیروی وارد شده به یک ذره را تعریف کنید.

ی) قانون ۳ نیوتون را برای نیروی تعریف شده استخراج کنید.

ک) معادله‌ی نیوتون آن طور که بدست می‌آید معادله‌ای درجه دو است، لطفاً پارادوکس تیر زنون را در ویکیپدیا مطالعه کنید: Zeno arrow paradox و بگویید این ابهام بوجود آمده برای زنون چه ارتباطی با مرتبه دو بودن معادله‌ی دیفرانسیلی قانون ۲ دارد، آیا اگر قانون ۲ مرتبه‌ی یک بدست آمده بود ایراد زنون وارد بود؟ در این باره بحث کنید.

۹ - از میان میدان‌های نیروی زیر در کلی‌ترین فرم توابع به کار رفته کدام یک پایستار و کدام یک ناپایستار است؟

الف)  $\vec{F} = f(r)\hat{r}$

ب)  $\vec{F} = f(r, \theta, \phi)\hat{r}$

ج)  $\vec{F} = f(x)\hat{x}$

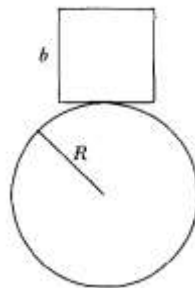
د)  $\vec{F} = f(z)\hat{z}$

ه)  $\vec{F} = 0$  for  $\vec{r} \in \bar{A}$ ,  $\vec{F} = \text{nonzero vector}$  for  $\vec{r} \in A$  که  $A$  یک ناحیه از فضا است و  $\bar{A}$  مکمل آن ناحیه است.

و)  $\vec{F} = f(t)\hat{x}$

۱۰- ذره ای در میدان گرانشی ثابت با سرعت اولیه  $v_0$  به طور قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. نشان دهید، اگر نیروی ترمزی با مجذور سرعت متناسب باشد، در این صورت سرعت ذره در هنگام بازگشت به مکان اولیه برابر است با  $\frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^2 + v_t^2}}$  که در آن  $v_t$  سرعت حد است.

۱۱- مکعب صلبی با چگالی یکنواخت و به یال  $b$  بر بالای استوانه ای به شعاع  $R$  در حال تعادل است. سطوح چهار وجه مکعب با محور استوانه موازیند. تماس بین مکعب و استوانه کاملاً ناهموار است تحت چه شرایطی این تعادل پایدار یا ناپایدار است.



۱۲- ذره ای را در نظر بگیرید که تنها نیروی نیروی زاویه به شکل  $F_\theta = mr\dot{\theta}$  به آن وارد می‌شود. نشان دهید که  $r\dot{\theta} = \sqrt{A \ln r + B}$  که در آن  $A$  و  $B$  ثوابت انتگرال گیری هستند که بر اساس شرایط اولیه محاسبه می‌شوند.

۱۳- بلوکی به جرم  $m$  بر روی میز بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. مطابق شکل حرکت بلوک توسط یک حلقه به شعاع  $l$  مقید شده است. بلوک با سرعت مماسی اولیه  $v_0$  شروع به حرکت می‌کند ضریب اصطکاک بین حلقه و بلوک برابر  $\mu$  است. مقدار سرعت و مکان زاویه ای  $\theta(t)$  را بیابید.

