

تمرین سری ۷ مکانیک تحلیل

مهلت تحویل: تا روز امتحان

۱- تابعی از دو متغیر x_1, x_2 و در نظر بگیرید: $\square(x_1, x_2)$. تبدیل لژاندر این تابع برای متغیر x_1 را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$(L_1 \square)(\tilde{x}_1, x_2) := \text{Max}_{x_1} (\tilde{x}_1 x_1 - \square(x_1, x_2))$$

که در سمت راست این تساوی ماکسیمم‌گیری روی x_1 انجام شده است. یعنی مقدار مشخص $x_1^{(0)}$ ای وجود دارد که:

$$\text{Max}_{x_1} (\tilde{x}_1 x_1 - \square(x_1, x_2)) = \tilde{x}_1 x_1^{(0)} - \square(x_1^{(0)}, x_2)$$

الف) رابطه‌ای برای $x_1^{(0)}$ بنویسید.

ب) تبدیل لژاندر $\square(x) = e^x$ را بیابید.

ج) نشان دهید:

$$(L_1 L_1 \square)(x_1, x_2) = \square(x_1, x_2)$$

د) با توجه به تعریف‌های یاد گرفته شده نشان دهید: $L_2(\mathcal{L}(q, \dot{q})) = \mathcal{H}(q, p)$ که \mathcal{L} لاگرانژی، \mathcal{H} همیلتونی و L_2 تبدیل لژاندر روی متغیر دوم لاگرانژی (\dot{q}) است.

۲- در این مساله قصد داریم ژئودزی یا همان خم کمترین طول را بر روی سطح کره‌ای به شعاع R پیدا کنیم. تمام نقاط روی کره در مختصات کروی با دو پارامتر آشنای (ϕ, θ) مشخص می‌شوند.

الف) فاصله‌ی میان دو نقطه به مختصات (ϕ, θ) و $(\phi + d\phi, \theta + d\theta)$ که از هم به طور دیفرانسیلی فاصله دارند ds چقدر است؟

ب) خمی را روی کره در نظر بگیرید که معادله‌ی آن به صورت $\phi = f(\theta)$ است. آغاز این خم را در $\phi = 0, \theta = 0$ و پایان آن را در $\phi = \phi_0, \theta = \theta_0$ در نظر بگیرید و فرض کنید تابع f تابعی تک مقداری است. طول خم را به صورت انتگرالی بنویسید.

ج) به کمک حساب وردش‌ها معادله‌ی دیفرانسیلی برای $f(\theta)$ وقتی طول خم مینیمم است بیابید و سعی کنید معادله‌ی دیفرانسیل را حل کنید و معادلاتی برای ثوابت انتگرال‌گیری موجود ارائه دهید.

۳- اصل فرما در اپتیک هندسی بیان می‌کند، که نور همواره برای رفتن از نقطه‌ی A به B کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب می‌کند. پارامتر n (ضریب شکست) برای یک محیط شفاف به معنای این است که سرعت نور در آن محیط c/n است. حال فرض کنید نور می‌خواهد در محیطی دو بعدی $x - y$ که ضریب شکست آن تابع معلومی از x است $n(x)$ حرکت کند. معادله‌ی مسیر نور را به صورت $y = y(x)$ در نظر بگیرید. زمان رسیدن از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر را به صورت انتگرالی بنویسید و به کمک وردشگیری برای مینیمم کردن زمان، قانون شکست (اسنل) را اثبات کنید:

$$\sin \theta_1 n_1 = \sin \theta_2 n_2$$

۴- جسمی را در نظر بگیرید که با لاگرانژی زیر در فضای دو بعدی حرکت می‌کند:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{A}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

معادلات لاگرانژ برای این جسم را بنویسید، و تلاش کنید با ترکیب این دو معادله به معادله‌ای به فرم: $\partial_t(S(x, y, \dot{x}, \dot{y})) = 0$ برسید. به این معادله معادله‌ی پایستگی برای کمیت S می‌گویند. قانون نوتر بیان می‌کند هر کمیت پایسته در تئوری با یک تقارن متناظر است، چه تقارنی در لاگرانژی اولیه وجود داشت، که مسبب این پایستگی شد؟