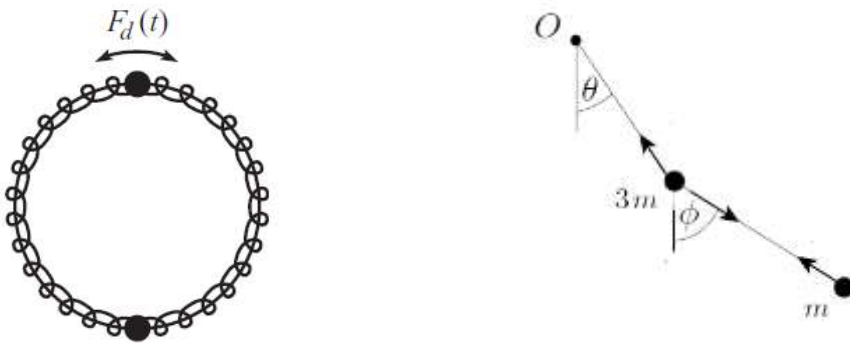


تمرین سری ۴- مکانیک تحلیلی ۱ / مهلت تحویل: دوشنبه ۲۸ آبان ۹۷

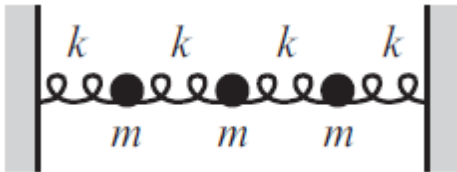
۱- پاسخ یک نوسانگر خطی را به تابع وادارنده زیر به دست آورید

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a \sin \omega t & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

۲- جسمی با جرم $3m$ توسط ریسمان بدون جرمی به طول a به نقطه O ثابت شده است. جسم دومی با جرم m توسط ریسمان بدون جرمی به طول a به جرم اول متصل شده است. الف) معادلات حرکت دو جسم را بر حسب θ و ϕ بنویسید. ب) فرکانس‌های اصلی سیستم و فرم معادلات ارتعاشی متناظر آنها را بنویسید.



۳- دو جسم مشابه به جرم m مطابق شکل محدود به حرکت در یک مسیر دایره‌ای هستند. این دو جرم توسط دو فنر مشابه k به هم متصل هستند. اگر به یکی از جرم‌ها نیروی $F_d \cos \omega t$ اعمال گردد. جواب خصوصی معادلات حرکت را بیابید. ۴- چهار فنر مشابه و سه جرم مشابه بین دو دیوار به صورت شکل زیر نصب شده‌اند. موده‌های نرمال را بیابید.



۵- برای ارتعاشات کوچک، دوره تناوب آونگ تقریباً برابر $T \cong 2\pi\sqrt{l/g}$ است که از مستقل از زاویه اولیه θ_0 می‌باشد. برای ارتعاشات محدود با استفاده از عبارت $dt = dx/v$ نشان دهید که

$$T = \sqrt{\frac{8l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

همچنین مقدار تقریبی عبارت بالا را تا مرتبه دو θ_0 محاسبه کنید.

۶- آرایه‌ای N تایی از ذرات به جرم m روی یک حلقه که بوسیله فنرهایی به طول اولیه l_0 ثابت فنر k به هم متصل شده و با فاصله a از هم قرار گرفته‌اند و هر جسم فقط می‌تواند سر جای خود بالا و پایین برود و ارتفاع y_i کسب کند را در نظر بگیرید، N اندیس شمارنده‌ی ذرات است. فرض کنید این آرایه بسته است، یعنی ذره‌ی شماره‌ی N از یک طرف به ذره‌ی $1 - N$ از سوی دیگر به ذره‌ی 1 متصل است.

الف) معادله‌ی حرکت ذره‌ی N ام را بر حسب مکان این ذره و مکان دو همسایه‌اش y_i و y_{i+1} و y_{i-1} بنویسید. (این کار را تا کوچکترین مرتبه نسبت به y_i ‌ها انجام دهید.)

معادلات حرکت بدست آمده را می‌توان در ماتریسی به فرم زیر جمع آوری کرد:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

که A یک ماتریس N در N است. فرم کلی این ماتریس را بنویسید. در نقاط سر و ته آرایه دقت کافی را به خرج دهید. برای پیدا کردن مدهای نوسانی این سیستم باید علی‌الاصول بتوان ماتریس فوق را قطری کرد. در نگاه اول این کار غیر ممکن به نظر می‌رسد. اما می‌توان حدس‌هایی زد. مختصات جدیدی برای توصیف این سیستم به کار می‌بریم به فرم زیر:

$$x_i = \sum_{j=1}^N R_{ij} y_j, \quad R_{ij} = a \cos\left(\frac{2\pi j i}{N}\right)$$

که این تبدیل خطی مختصات را با یک ماتریس تبدیل R نمایش داده‌ایم. a نیز یک ثابت است.

ب) نشان دهید ماتریس R متعامد است، یعنی: $R_{im} R_{mj} = \delta_{ij}$. ثابت a را بیابید.

$$\sum_{i=1}^N \cos\left(\frac{2\pi j i}{N}\right) = 0 \quad \text{if } j \neq 0 \quad [\text{راهنمایی:}]$$

ج) معادله‌ی حرکت قسمت الف را به مختصات x ببرید و \ddot{x}_i را بر حسب x_j ‌ها بدست آورید. نشان دهید در این مختصات معادلات حرکت قطری اند و $\ddot{x}_i = -\omega_i^2 x_i$ را که فرکانس نوسانات مد نورمال N ام است را بیابید.

د) در حد $N \rightarrow \infty$ و $a, l_0 \rightarrow 0$ آیا جواب‌ها همانگونه که انتظار دارید هستند؟