

تمرین سری ۲- مکانیک تحلیلی ۱

موعد تحویل: شنبه ۱۲ آبان ۱۳۹۷

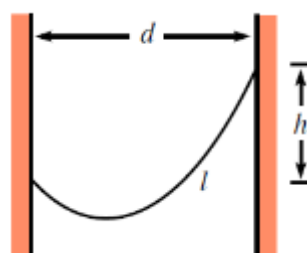
۱- ذره‌ای تحت تاثیر جاذبه و مقاومت هوا سقوط می‌کند، سرعت بر حسب مکان را برای زمانی که مقاومت هوا الف)

αv و ب) βv^2 باشد محاسبه نمایید؟

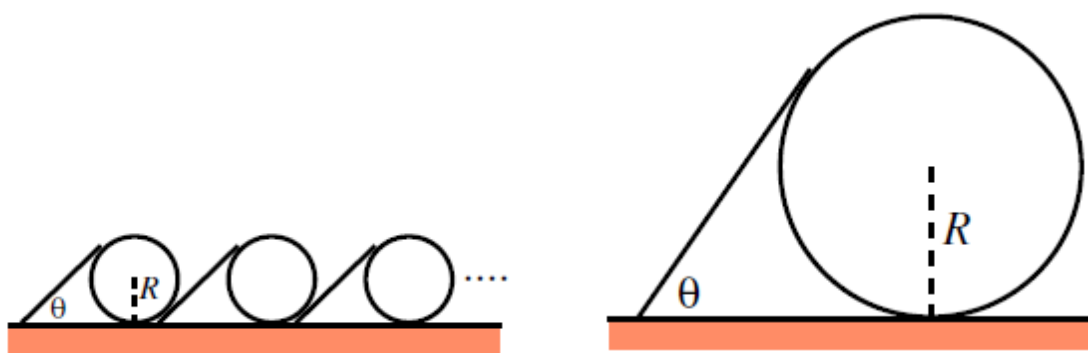
۲- یک بلوک به جرم m بر روی میز بدون اصطکاکی می‌لغزد و محدود به حرکت در داخل دایره‌ای به شعاع l شده است. در زمان $t = 0$ بلوک در حال حرکت در داخل حلقه و با سرعت v_0 است. اگر ضریب اصطکاک بین بلوک

و حلقه برابر μ باشد، الف) سرعت و ب) مکان بلوک را بر حسب زمان بیابید؟

۳- زنجیری با جرم یکنواخت به صورت شکل زیر بین دو دیوار آویخته شده است. معادله شکل زنجیر را بیابید؟



۴- الف) یک میله با چگالی خطی ρ بر روی یک دایره با شعاع R قرار دارد. میله با سطح افق زاویه θ می‌سازد. انتهای بالایی میله مماس بر دایره است و در تمامی نقاط تماس اصطکاک وجود دارد. با فرض اینکه سیستم ثابت می‌ماند اصطکاک بین زمین و دایره را بیابید. ب) حال فرض کنید بی نهایت میله و دایره مطابق شکل زیر داریم (انتهای بالایی میله مماس با دایره‌ها) با این تفاوت که کلیه سطوح بدون اصطکاک بوده و هر میله به زمین لولا شده است. نیروی عمودی بین دایره‌ها و میله‌ها در حد بی نهایت تعداد دایره‌ها چقدر است؟ (فرض کنید اولین دایره به زمین چسبیده است)



۵- ماشین آتوود الف) یک قرقره دوتایی بدون وزن به سه جرم مطابق شکل متصل است. شتاب هر یک از اجرام را بیابید؟ ب) یک ماشین آتوود بی نهایت را در نظر بگیرید، یک سر قرقره‌ها به جرم‌های برابر متصل است و سر

دیگر مطابق شکل به قرقره بعدی متصل است. اگر از حالت سکون وزنه ها را رها کنیم، شتاب بالاترین جرم را محاسبه کنید؟



- ۶- توپ را با سرعت v_0 به سمت بالا پرتاب می‌کنیم اگر نیروی مقاومت هوا max باشد سرعت توپ در هنگام برخورد با زمین چقدر است؟ نسبت به حالت خلاء، توپ زمان کمتر یا بیشتری در هوا بوده است؟
- ۷- توپ را با سرعت v از ارتفاع صفر با زاویه θ_0 پرتاب می‌کنیم. که در آن زاویه، توپ بیشترین فاصله را طی می‌کند. (طول منحنی) نشان دهید که این زاویه از رابطه زیر تبعیت می‌کند و مقدار عددی آن را با استفاده از کامپیوتر محاسبه نمایید.

$$1 = \sin\theta_0 \ln\left(\frac{1 + \sin\theta_0}{\cos\theta_0}\right)$$

8- قصد داریم عمومی‌ترین شکل مکانیکی که به کمک دیدگاه انرژی می‌توان ساخت را قدم به قدم بررسی کنیم. فرض کنید در فضای سه بعدی n ذره داریم. که مولفه i مکان ذره a را با $q_i^a(t)$ نشان می‌دهیم. انرژی کل این سیستم را در یک آنساز بخصوص (با تعدادی فرض‌های ساده‌کننده) این‌گونه می‌نویسیم:

$$E = K(q_i^a(t)^{(1)}, q_i^a(t)^{(2)}, \dots) + U(q_i^a(t))$$

جمله K (انرژی جنبشی) در حالت کلی تابعی از تمام مشتقات اول و دوم و ... تمام مولفه‌های مکان تمام ذرات است $(q_i^a(t)^{(f)})$ به معنای مشتق f ام زمانی $q_i^a(t)$ است. و جمله دوم U (انرژی پتانسیل) تابعی از تمام مولفه‌های مکان تمام ذرات است.

الف) برای K کلی‌ترین بسط تیلور که تمام مشتقات تمام مولفه‌های تمام ذرات را با هم قاطی می‌کند را

بنویسید.

ب) فرض تقارن انعکاس زمانی: $t \rightarrow -t$ را اعمال کنید و بسط فوق را محدود تر کنید.

ج) فرض تقارن انعکاس مکانی: $-q_i^a(t) \rightarrow q_i^a(t)$ را اعمال کنید و بسط فوق را محدود تر کنید.

د) فرض این که انرژی جنبشی هر ذره مستقل از وضعیت ذرات دیگر است را اعمال کنید و بسط را ساده تر کنید.

ه) فرض این که تمام برهمکنش ها دو به دو است، چه شرطی روی تابعیت U می گذارد؟

و) فرض تقارن جابجایی: $q_i^a(t) + A_i \rightarrow q_i^a(t)$ که A یک بردار ثابت است و فرض اینکه تعویض کردن دو ذره با هم تأثیری روی برهمکنش میان آن دو ذره ندارد، چه تأثیری روی تابعیت U می گذارد؟

ز) فرض تقارن دورانی: $R_{ij} q_j^a(t) \rightarrow q_i^a(t)$ که R یک ماتریس دوران دلخواه سه بعدی است، چه شرطی روی بسط K و تابعیت U می دهد؟

ح) با فرض کار کردن در انرژی های کم، تنها جمله ی اول غیر ثابت K را نگه دارید.

ط) با مشتق گیری نسبت به زمان، و این فرض که در یک لحظه می توان سرعت هر کدام از ذرات را به طور دلخواه انتخاب کرد و این نباید روی معادله ی دیفرانسیل قائی تأثیری بگذارد، قانون دو نیوتون را برای یکی از ذرات استخراج کنید، و نیروی وارد شده به یک ذره را تعریف کنید.

ی) قانون ۳ نیوتون را برای نیروی تعریف شده استخراج کنید.

ک) معادله ی نیوتون آن طور که بدست می آید معادله ای درجه دو است، لطفاً پارادوکس تیر زنون را در ویکیپدیا مطالعه کنید: Zeno arrow paradox و بگویید این ابهام بوجود آمده برای زنون چه ارتباطی با مرتبه دو بودن معادله ی دیفرانسیلی قانون ۲ دارد، آیا اگر قانون ۲ مرتبه ی یک بدست آمده بود ایراد زنون وارد بود؟ در این باره بحث کنید.

۹- از میان میدان های نیروی زیر در کلی ترین فرم توابع به کار رفته کدام یک پایستار و کدام یک ناپایستار است؟

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} \text{ (الف)}$$

$$\vec{F} = f(r, \theta, \phi)\hat{r} \text{ (ب)}$$

$$\vec{F} = f(x)\hat{x} \text{ (ج)}$$

$$\vec{F} = f(z)\hat{z} \text{ (د)}$$

ه) $\vec{F} = 0$ for $\vec{r} \in \bar{A}$, $\vec{F} = \text{nonzero vector}$ for $\vec{r} \in A$ که A یک ناحیه از فضا است و \bar{A} مکمل آن ناحیه است.

$$\vec{F} = f(t)\hat{x} \text{ (و)}$$