بسم خدا

جلسه یازدهم و دوازدهم

فصل پنجم : آشنایی با مشخصات عمومی سنسورها و سیستم های اندازه گیری

روش مطالعه : معرفی پارامترهای استاتیکی سیستم های اندازه گیری : صحت، تغییرات ورودی/خروجی

دامنه تغییرات ورودی/خروجی

خطا و دقت

تکرارپذیری

بایاس

تعقیب پذیری

آستانه اندازه گیری

حساسیت استاتیکی

خطی بودن

پسماند

جابجایی صفر

- پارامترهای دینامیکی سیستم های اندازه گیری

- در بسیاری از سیستم های اندازه گیری، کمیت مورد اندازه گیری بسیار کند یا زمان تغییر می کند.

این سیستم ها مشخصات و پارامترهای استاتیکی برای ما اهمیت پیدا می کنند.

- مشخصات و پارامترهای دینامیکی جهت بررسی کمیت هایی دینامیکی و متغیر با زمان (سریع) نظیر

شتاب در سیستم های مرتعش، نیرو در ربات ماشین کاری، ... اهمیت می یابند. پارامترهای فرکانس ثابت زمانی،

زمان لیج، زمان نشست، پهنای باند فرکانسی و ... به عنوان پاسخ دینامیکی سنسورها اندازه گیری را ارائه می شوند.

* پارامترهای استاتیکی:

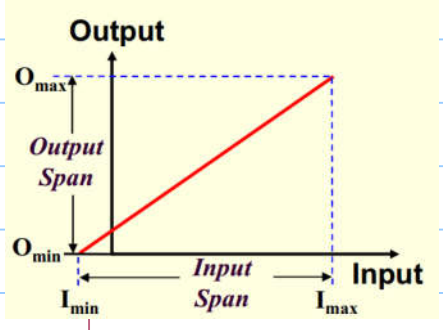
۱) بازه / حدود تغییرات (Input-Output Range): عبارت است از حدود تغییرات ورودی و خروجی (= محدوده کاری) سیستم اندازه گیری / سنسور.

- حدود تغییرات ورودی: حداقل و حداکثر کمیتی که قابل اندازه گیری است: (i_{min}, i_{max}) (input)

- حدود تغییرات خروجی: حداقل و حداکثر خروجی سیستم / سنسور به ازای حداقل و حداکثر ورودی سیستم: (o_{min}, o_{max}) (output)

مثال: فشارسنج $i: 100-150\ mmHg \rightarrow o: 0-5\ Volts$

شتاب سنج $i: -2g \text{ تا } 2g \rightarrow o: 0-20\ mA$



۲) گستره / دامنه تغییرات ورودی و خروجی (Input-Output Span)

Input Span $= i_{max} - i_{min}$ (مثال شتاب سنج: 4g)

Output Span $= o_{max} - o_{min}$ (20 mA

- حساسیت نسبت حداکثر تغییر ورودی/خروجی به هم بسیار بزرگ باشد، دقت صفر است.

واحد دسی بل (dB) برای بیان دامنه تغییرات استفاده می‌شود:

$$20 \log\left(\frac{i_{max}}{i_{min}}\right) = 20\left(\log i_{max} - \log i_{min}\right) \quad dB$$

$$20 \log\left(\frac{o_{max}}{o_{min}}\right) = 20\left(\log o_{max} - \log o_{min}\right) \quad dB$$

3) خطا (Error) : اختلاف بین مقدار اندازه گیری شده و مقدار واقعی کمیت اندازه گیری شده

$$error = x_{measured} - x_{actual/True}$$

(x_measured: دستگاه (ابزار) ، x_actual/True: تعادل)

حاصل جمع هر دو برابر با خطای دستگاه و تعادل

4) دقت (Accuracy) : بیان مقدار کم خطا نسبت به یک مقدار مرجع (نظیر دامنه تغییرات خروجی یا مقدار قرائت شده) به درصد.

الف) Accuracy as percent of full scale (%FS) $= \frac{|error|}{\text{Max Scale Value}} \times 100$

$$= \left\{ \frac{\text{Measured Value}(o_{meas}) - \text{Actual Value}(o_{act})}{\text{Output Span}\ (o_{max} - o_{min})} \right\} \times 100$$

%FSR (Full Scale Range)
%FSo (Full Scale Output)

ب) Accuracy as percent of output (%Reading) $= \frac{|error|}{\text{Measured Value}} \times 100$

$$= \left\{ \frac{\text{Measured Value}(o_{meas}) - \text{Actual Value}(o_{act})}{\text{Measured Value}(o_{meas})} \right\} \times 100$$

همچنین ارقام دقت برحسب مقادیر اندازه گیری شده، واقعی و یا دامنه تغییرات ورودی ارائه می‌شود؛ به عبارتی

در مثال های بالا محاسبات برحسب مقادیر ورودی (i_{meas} ، i_{act} و Input Span) خواهد بود.

مثال : یک ترنسدیوسر فشار با بازه تغییرات (ورودی) 0 - 100 bar ،

دقت ± 1 % FSR در مقدار 10 bar عبارت است از : 10 ± 1 bar

$\frac{1}{100} \times (100 - 0)$ ← Span

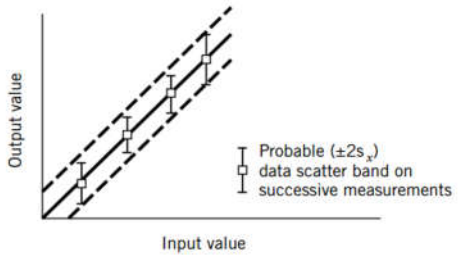
دقت ± 1 % Reading در مقدار 10 bar عبارت است از : 10 ± 0.1 bar

قرائت ← $\frac{1}{100} \times 10$ ← مقدار قرائت شده

5) تکرارپذیری یا پراکندگی (Precision) : عبارت است از توانایی مستقل بودن وسیله اندازه‌گیری در تکرار متوالی اندازه‌گیری‌های متوالی در شرایط محیطی یکسان (≡ پراکندگی یا واریانس داده‌ها)

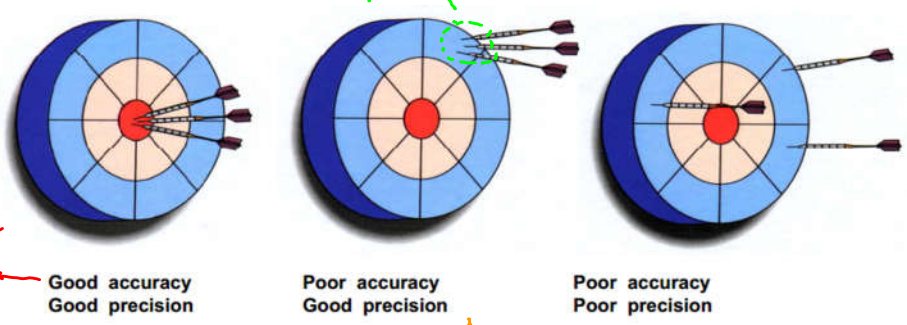
به دو صورت درصد FSR یا FSO (معمولاً) و یا درصد قرائت بیان می‌شود.

بیان تکرارپذیری معمولاً با درجه اطمینان (مثلاً 68 % یا 95 % و ...) همراه است.



Precision یا (Repeatability) تکرارپذیری یا خطای تکرارپذیری = $\frac{2s_x \text{ یا } 2s_x + d}{R, \max \text{ output span}} \times 100$ (95 %)

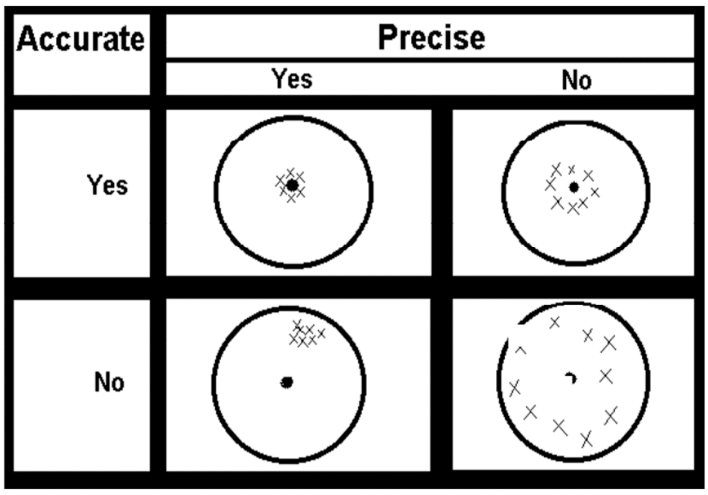
مقایسه دقت و تکرارپذیری :



تکرارپذیری بالا

دقت بالا = نزدیکی به مقدار واقعی (هدف)

با کالیبراسیون و تنظیم دستگاه (حذف خطای بایاس یا بایاس) مشکل را تا حد زیادی رفع کرد.

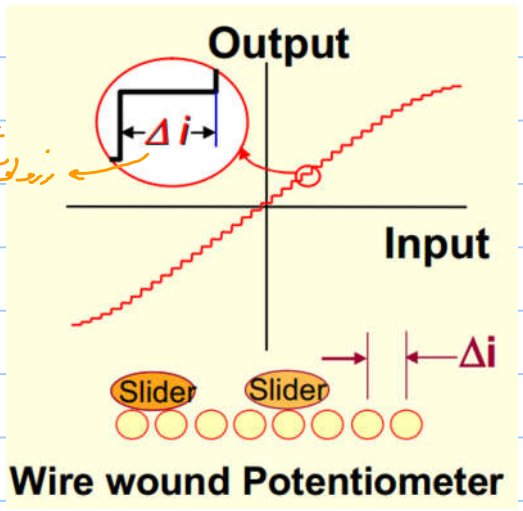


- برای اندازه گیری دقت سنسور، نیاز به یک مرجع مناسب یا وسیله ای با دقت بالاتر است.

- برای اندازه گیری تکرارپذیری، خود سنسور کفایت می کند و محاسباتش با مقادیر های متوالی انجام می شود.

۶) رزولوشن / تفکیک پذیری (Resolution): کوچکترین مقدار تغییری که قادر به تشخیص اندازه گیری

ایجاد شود، توسط سنسور قابل دریافت باشد.



(Res) رزولوشن

- مثال: کولیس با رزولوشن 0.1 mm (اگرچه تغییر طول به صورت پیوسته است، ولی توسط کولیس قابل دریافت نیست)

در سنسورهای نالاک

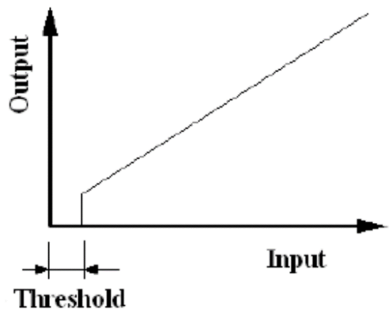
با احتمال 95٪ $u_0 = \pm \frac{1}{2} Res$ عدم قطعیت ها از رزولوشن

$u_0 = 1$ least significant digit

در سنسورهای دیجیتال

۷) آستانه اندازه گیری (Threshold): حداقل میزانی که اندازه گیری به موجب تغییر در خروجی

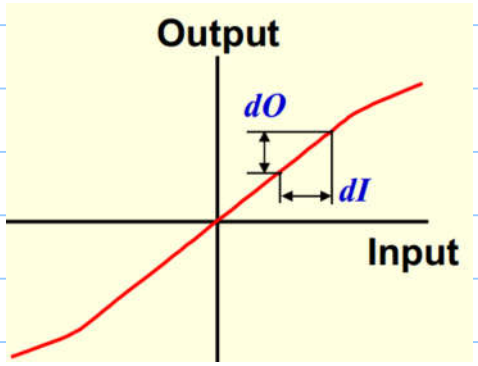
سیستم اندازه گیری می شود (= تولید خروجی غیر صفر می کند)

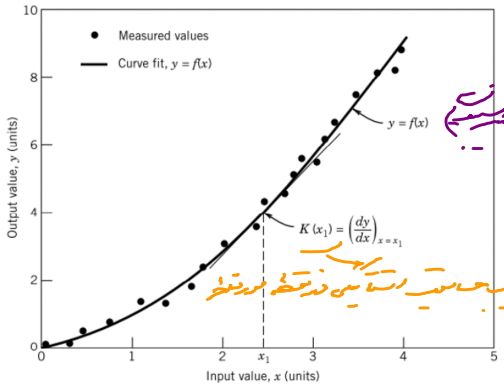


(مثل سنسور ماصله سنج)

۴) حساسیت استاتیکی (Static Sensitivity) : نسبت تغییرات خروجی به تغییرات ورودی مطلوب (i_D)

- کالیبراسیون: به سیستم اندازه‌گیری عبارت است از مقایسه خروجی ابزار اندازه‌گیری با خروجی یک دستگاه مرجع (استاندارد) و رسم منحنی ۵-۱





(منحنی کالیبراسیون)

ضریب حساسیت استاتیکی در نقطه مورد نظر

ورودی مطلوب

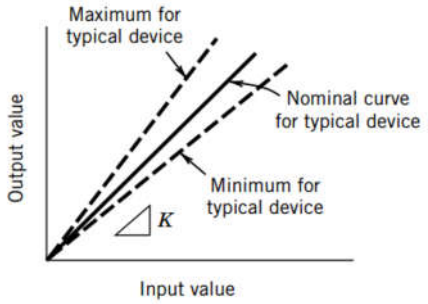
$K_D = \frac{\Delta o}{\Delta i_D}$ (برای سنسورهای خطی)

$K_D = \left.\frac{do}{di_D}\right|_{\bar{i}_D}$

Desired (مطلوب)

در سیستم‌های غیرخطی به صورت شیب خط مماس تعریف می‌شود.

۵ - ب) حساسیت (Sensitivity Shift) : تغییرات ضریب کالیبراسیون (= حساسیت استاتیکی) بر اثر ورودی تغییردهنده (i_M)



$K_m = \left.\frac{dK_D}{di_M}\right|_{\bar{i}_D, \bar{i}_M}$

(تغییردهنده) Modifying

- مثال: یک ترنسدیوسر فشار با ضریب حساسیت استاتیکی $K_D = 10 \frac{mV}{kPa}$ و با مدل الاستیکی

$K_M = 0.01 \frac{mV}{kPa \cdot ^\circ C}$ ، 100 kPa و دمای $25^\circ C$ را در نظر بگیرید. اگر در دمای $40^\circ C$ باشد، ضریب حساسیت اصلاح شده ورودی-خروجی در دمای $40^\circ C$ را بیابید.

$\Delta T = 40 - 25 = 15^\circ C \rightarrow K_M = \frac{\Delta K_D}{\Delta i_M} \Rightarrow \Delta K_D = 0.01 \times 15 = 0.15 \frac{mV}{kPa}$

($\Delta T = \Delta i_M$)

$\Rightarrow K_{D,new} = 10 + 0.15 = 10.15 \frac{mV}{kPa}$

۹) خطی بودن (linearity) : مقدار انحراف منحنی کالیبراسیون از یک خط مرجع

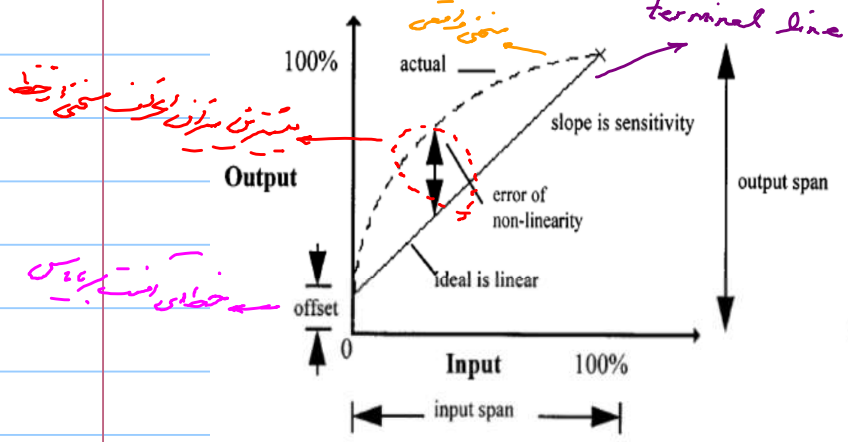
← معمولاً برحسب ٪FSR یا ٪FSO بیان می‌شود

← البته ممکن است خطای غیرخطی‌بودن برحسب درصد مقدار خوانده شده نیز بیان شود.

← خط مرجع می‌تواند خط عبوری از نقاط (i_{min}, o_{min}) و (i_{max}, o_{max}) باشد و terminal line نام دارد

و یا بهترین خط عبوری از روش مینیمم مربعات باشد و نام least Square error line دارد

$$\text{linearity error} = \frac{\text{max Deviation}}{\text{Output Span}} \times 100 \quad (\text{٪FSR یا ٪FSO})$$



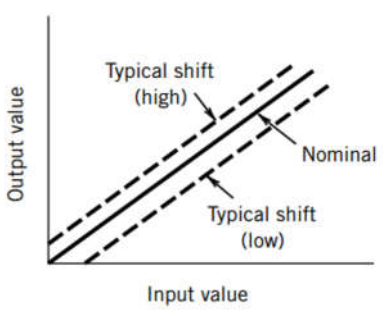
خطای غیرخطی‌گری بر اساس خط ترمینال: خطی که ابتدا و انتهای span را به هم وصل می کند.

خطای غیرخطی‌گری بر اساس بهترین خط (به دست آمده از طریق مینیمم کردن مربعات خطا)

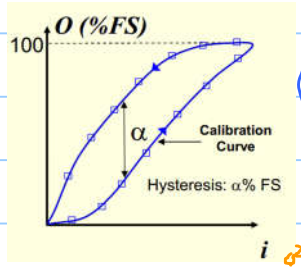
۱۰) جابجایی صفر (Bias/offset یا Zero shift): تغییر در خروجی سنسور زمانی‌که ورودی مقدار صفر (i_{min}) باشد

← ممکن است در اثر عوامل تداخلی و یا بهم خوردن کالیبراسیون دستگاه باشد

← جابجایی صفر (انتقال) شیب منحنی کالیبراسیون را تغییر نمی‌دهد (برخلاف K_H) و به ازای همه ورودی‌ها مشاهده می‌شود.



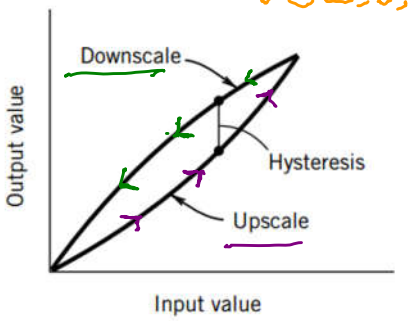
۱) پسماند یا هیسترزیس (Hysteresis) : اگر سیستم اندازه‌گیری در دو موقعیت افزایش ورودی و کاهش ورودی



دقت و صحت داشته باشد، سیستم دارای خطای سیستماتیک است. (مثل سنسور خطی با اثرات مغناطیسی هال)

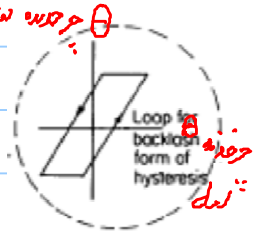
سیگنال خروجی به تغییرات میدان مغناطیسی خروجی وابسته نشان می‌دهد.

← هیسترزیس در عملکرد سیستم اندازه‌گیری تاثیر دارد.

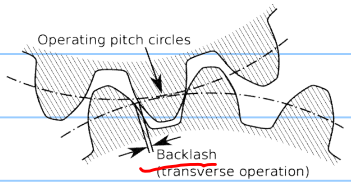


حداکثر خطای هیسترزیس = $\frac{u_{h,max}}{\text{output span}} \times 100 = \frac{|y_{upscale} - y_{downscale}|}{\text{output span}} \times 100$

- پسماند معمولا به صورت لقی (Backlash) دیده می‌شود.



حرکت در جهت



توصیه مهم: همانطور که در شماره‌های ۶ و ۱۰ بیان شد: ورودی‌های تغییردهنده و تداخلی سبب بوجود آمدن اثرات

(zero shift) باعث تغییر نقطه صفر کالیبراسیون می‌شوند. معمولا آن قسمت از ورودی‌ها که سبب اثر می‌شوند را

تداخلی؛ و آن قسمت که سبب تغییر شیب نقطه صفر کالیبراسیون می‌شود را تغییردهنده در نظر می‌گیریم.

اثر ورودی‌های تداخلی و تغییردهنده معمولا با ضرایب حساسیت نشان داده می‌شوند (K_I و K_M)

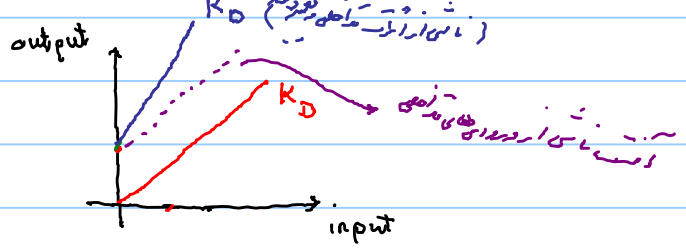


Table 1.1 Manufacturer's Specifications: Typical Pressure Transducer

Operation	
Input range	0–1000 cm H_2O
Excitation	±15 V DC
Output range	0–5 V
Performance	
Linearity error	±0.5% FSO
Hysteresis error	Less than ±0.15% FSO
Sensitivity error	±0.25% of reading
Thermal sensitivity error	±0.02%/°C of reading
Thermal zero drift	±0.02%/°C FSO
Temperature range	0–50 °C

FSO, full-scale operating range.

Model		FAM-15PASR	Unit
Recommended operating conditions			
Pressure type		Absolute pressure	-
Rated pressure		168.0	kPa.abs
Measurable pressure range		34.66 to 168.0	kPa.abs
Temperature range		0 to 50	deg.C
Pressure media		Non-corrosive gases only (No liquid)	-
Excitation current (Constant)		1.5	mADC
Absolute maximum rating			
Maximum load pressure		Twice of rated pressure	-
Maximum excitation current		3.0	mADC
Operating temperature		-20 to 100	deg.C
Storage temperature		-40 to 120	deg.C
Operating humidity		30 to 80 (Non dew condition)	%RH
Electric characteristics (Drive Current 1.5mA constant ,ambient temperature Ta=25deg.C)			
Output span voltage		80 to 160 (at 34.66 to 168.0kPa.abs)	mV
Offset voltage		50 to 130 (at 101.3kPa.abs)	mV
Bridge resistance		4000 to 6000	Ω
Response time		2 (for the reference)	msec.
Accuracy	TSO*	+/-3	%FS/0-50deg.C
	TCS*	2.5	%FS/0-50deg.C
	Linearity	+/-0.3	%FS
	Pressure hysteresis	+/-0.2	%FS

*TSO : Temperature sensitivity of offset voltage(Temperature range from 0-50 deg.C)
*TCS : Temperature coefficient of output span voltage(Temperature range from 0-50 deg.C)

Operating Characteristics

Table 1. Operating Characteristics (V_S = 5.0 Vdc, T_A = 25°C unless otherwise noted, P1 > P2. Decoupling circuit shown in Figure 4 required to meet electrical specifications.)

Characteristic		Symbol	Min	Typ	Max	Unit
Pressure Range[1]		P_{OP}	0	—	50	kPa
Supply Voltage[2]		V_S	4.75	5.0	5.25	Vdc
Supply Current		I_o	—	7.0	10	mAdc
Minimum Pressure Offset[3] @ V_S = 5.0 Volts	(0 to 85°C)	V_{off}	0.088	0.2	0.313	Vdc
Full Scale Output[4] @ V_S = 5.0 Volts	(0 to 85°C)	V_{FSO}	4.587	4.7	4.813	Vdc
Full Scale Span[5] @ V_S = 5.0 Volts	(0 to 85°C)	V_{FSS}	—	4.5	—	Vdc
Accuracy[6]	(0 to 85°C)	—	—	—	±2.5	$\%V_{FSS}$
Sensitivity		V/P	—	90	—	mV/kPa
Response Time[7]		t_R	—	1.0	—	ms
Output Source Current at Full Scale Output		I_{o+}	—	0.1	—	mAdc
Warm-Up Time[8]		—	—	20	—	ms
Offset Stability[9]		—	—	±0.5	—	$\%V_{FSS}$

Table 3. Sensor characteristics

Symbol	Parameter	Test conditions	Min.	Typ.(1)	Max.	Unit
LA_FS	Linear acceleration measurement range(2)			±2		*g*
				±4		
				±6		
				±8		
				±16		
M_FS	Magnetic measurement range			±2		gauss
				±4		
				±8		
				±12		
LA_So	Linear acceleration sensitivity	Linear acceleration FS=±2g		0.061		mg/LSB
		Linear acceleration FS=±4g		0.122		
		Linear acceleration FS=±6g		0.183		
		Linear acceleration FS=±8g		0.244		
		Linear acceleration FS=±16g		0.732		
M_GN	Magnetic sensitivity	Magnetic FS=±2gauss		0.080		mgauss/ LSB
		Magnetic FS=±4gauss		0.160		
		Magnetic FS=±8gauss		0.320		
		Magnetic FS=±12gauss		0.479		
LA_TCSo	Linear acceleration sensitivity change vs. temperature			±0.01		%/°C
M_TCSo	Magnetic sensitivity change vs. temperature			±0.05		%/°C
LA_TyOff	Linear acceleration typical zero-*g* level offset accuracy(3),(4)			±60		m*g*
LA_TCOff	Linear acceleration zero-*g* level change vs. temperature	Max. delta from 25 °C		±0.5		m*g*/°C
LA_An	Linear acceleration noise density	Linear acceleration FS=2g; ODR = 100 Hz		150		ug/ sqrt(Hz)

* خطای کل و عدم قطعیت ابزار اندازه‌گیری

- تخمین عدم قطعیت کل سیستم اندازه‌گیری ناشی از تمام خطاهای موجود در سیستم اندازه‌گیری را خطای کل ابزار (u_c) گویند.

- آنالیز عدم قطعیت در مرحله طراحی به منظور تخمین عدم قطعیت حاصل از هر گونه اندازه‌گیری واسنجی و یا انجام تحلیل‌های روش‌های اندازه‌گیری به کار می‌رود. (به عنوان تخمینی از میزان عدم قطعیت در خروجی پس از انجام هر گونه واسنجی)

تخمین مقدار عدم قطعیت ← عدم قطعیت در مرحله طراحی

Design Stage Uncertainty $u_d = \sqrt{u_0^2 + u_c^2}$ (٪)

u_0: عدم قطعیت مربوط به صفر (خطاهای مواقعی که ثبت کردن داشتی از روی دستگاه)

u_c: خطاهای ثبت شده توسط دستگاه (خطای هیسترزیس، خطای خطی و ...)

$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_k^2}$ (٪)

(u_1, u_2, ... u_k خطای مستقل مشترک اول ها، واحدهای مبنی و ضریب اطمینان مبنا)

لـ ابتدا مقدار عدم قطعیت ها از روش ریشه مجموع مربعات (با فرض مستقل بودن، تصادفی بودن و نرمال بودن)

- اگر همه خطاها صفر باشد، مقدار اندازه‌گیری شده به توانایی مراقبت و دقت اطلاعات اندازه‌گیری ارتباط می‌یابد. به این

نوع عدم قطعیت، عدم قطعیت مربوط صفر گفته می‌شود (عدم قطعیت ناشی از رزولوشن)

مثال: فشار ولت متر برای تحمل سیگنال خروجی یک مدل فشار استفاده می‌شود. فشار اندازه‌گیری شده حدود 3 psi است. با داشتن اطلاعات زیر از ولت متر و مدل فشار، عدم قطعیت مرحله طراحی در این تریبس را محاسبه نمایید.

Voltmeter	
Resolution:	10 μV
Accuracy:	within 0.001% of reading
Transducer	
Range:	±5 psi (~±0.35 bar)
Sensitivity:	1 V/psi
Input power:	10 VDC ± 1%
Output:	±5 V
Linearity error:	within 2.5 mV/psi over range
Sensitivity error:	within 2 mV/psi over range
Resolution:	negligible

KNOWN Instrument specifications

ASSUMPTIONS Values at 95% probability; normal distribution of errors

FIND u_c for each device and u_d for the measurement system

عدم قطعیت طراحی ولت متر $(u_d)_E = \sqrt{(u_0)_E^2 + (u_c)_E^2}$

$(u_0)_E = \frac{10}{2} = 5\ \mu V$

$P = 3\ psi \Rightarrow V = 3(psi) \times 1\frac{V}{psi} = 3V$ ولتاژ یا از مقدار خروجی مدل فشار

$\Rightarrow (u_c)_E = 3V \times \frac{0.001}{100} = 30\ \mu V$

$\Rightarrow (u_d)_E = \sqrt{5^2 + 30^2} = \pm 30.4\ \mu V$ (95٪)

عدم قطعیت طراحی مدل $(u_d)_P = \sqrt{(u_0)_P^2 + (u_c)_P^2}$

$(u_0)_P \approx 0$

$$(u_c)_p = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\left(2.5\ \frac{mV}{psi} \times 3\ psi\right)^2 + \left(2\ \frac{mV}{psi} \times 3 psi\right)^2} = 9.61 mV$$

که u_1: خطای مرجع‌گیری — که u_2: خطای حساسیت

$$\Rightarrow (u_d)_p = \pm 9.61\ mV \quad (95\%)$$

(روش مجموع ریشه‌ها) RSS = روش

$$\Rightarrow \text{سیستم } u_d = \sqrt{(u_d)_E^2 + (u_d)_p^2} = \sqrt{(0.030\ mV)^2 + (9.61\ mV)^2}$$

$$\Rightarrow u_d = \pm 9.61\ mV \quad (95\%) \equiv u_d = \pm 0.0096\ psi \quad (95\%)$$

$K = 1\ \frac{V}{psi}$

- شاهده می‌شود که تقریباً همه عدم قطعیت به واسطه عدل فشار می‌باشد؛ بنابراین از عدم قطعیت در حواس‌گیری

بنابراین لازم است که جهت کاهش عدم قطعیت اندازه‌گیری فشار در این سیستم اندازه‌گیری به کمک دقت عدل فشار

(و نه ولت‌متر) را ارتقا داد.

* رفتار دینامیکی در سیستم‌های اندازه‌گیری

سیستم‌های دینامیکی خطی را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیل

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = F(t)$$

خطی مرتبه n مدل‌سازی نمود.

- به طور کلی، می‌توان هر چند یک سیستم اندازه‌گیری را در مقابل یک سیستم مرتبه صفر، مرتبه اول و یا مرتبه دوم (و مجموعه‌ای از آن‌ها در نظر گرفت).

- جهت بررسی رفتار یک سیستم دینامیکی (در اینجا سیستم اندازه‌گیری)، عموماً رفتار پاسخ آن به ازای دو ورودی پله‌ای (تغییر ناگهانی در مقدار ورودی) و سینوسی ساده (Simple Periodic) مطالعه می‌شود.

← (1) در سنسورها و سیستم‌های اندازه‌گیری، از لحظه‌ای که تغییر ناگهانی در مقدار ورودی سیستم ایجاد می‌شود تا زمانی که سنسور تغییرات را نشان دهد، زمان تأخیر وجود دارد.

← (2) در سیستم‌های دینامیکی، دامنه خروجی می‌تواند تابعی از فرکانس سیگنال ورودی بوده و همچنین زمان ورودی (یا مکانی) و خروجی، تأخیر فاز وجود داشته باشد. (مثال: ارتعاشات ساختمان‌ها، دامنه صوتی خودرو و ...)

← توانایی یک سیستم اندازه‌گیری در دنبال کردن سیگنال‌های ورودی دینامیکی در مشخصه‌های طراحی اجزای مختلف آن سیستم می‌باشد.

الف) سیستم‌های مرتبه صفر (zero-order systems) ← سیستم‌های اندازه‌گیری استاتیکی

ساده‌ترین مدل شبیه‌سازی یک سیستم اندازه‌گیری که در آن از همه معادلات دیفرانسیل مرتبه صفر (≡ معادله جبری) استفاده شده است:

$$a_0 y(t) = F(t) \Rightarrow y(t) = K F(t)$$

این سیستم به خوبی مدل شده است به خروجی در همان لحظه‌ها و بدون تأخیر زمانی پاسخ می‌دهد.

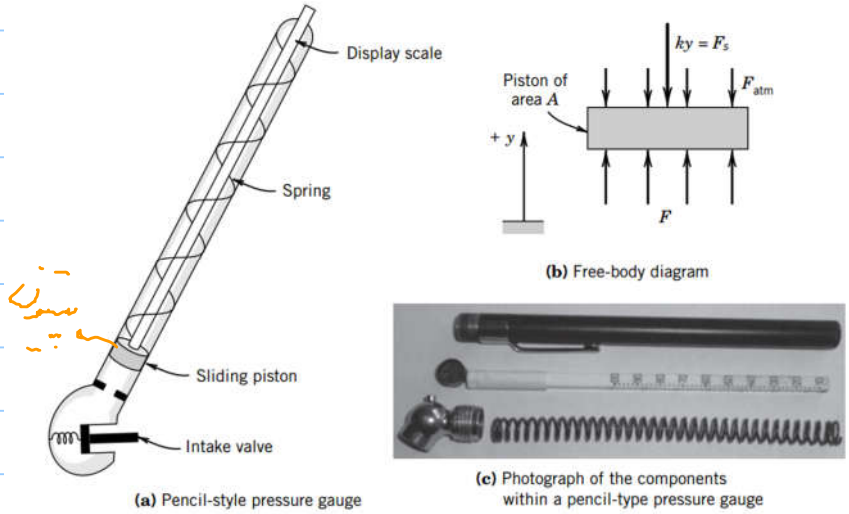
K ← حساسیت استاتیکی (static sensitivity) یا بهره‌ی پایا (steady gain)

$\left(\frac{dy}{dF} = K\right)$ ← سیستم اندازه‌گیری ورودی را بهره K تقویت می‌کند (K را بزرگ می‌کند)

در کالیبراسیون استاتیکی، مفهوم همه‌ی سیستم‌های مرتبه صفر نهفته است؛ در ورودی‌های ثابتی، یا هیچ خروجی از سیستم مرتبه صفر فقط در نقاط تعادل (≡ زمان‌هایی که $\frac{d}{dt}$ همه‌ی عبارت‌ها صفر می‌شود) متغیر است.

لازم به ذکر است سیستم‌های استاتیکی واقعی الزام‌های ناچیزی با خود به همراه دارند و بررسی دقیق‌تر پاسخ‌های آن‌ها نیاز به بهره‌گیری از معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر است.

مثال: فشارسنج مدادی (pencil-type Pressure gauge) که وسیله‌ای جهت اندازه‌گیری فشار هوای تایر می‌باشد را می‌توان به صورت یک سیستم مرتبه صفر (≡ تعادل استاتیکی) مدل نمود.



(a) Pencil-style pressure gauge

(b) Free-body diagram

(c) Photograph of the components within a pencil-type pressure gauge

تعادل استاتیکی: $Ky + P_{atm} \cdot A = P \cdot A$

$$\Rightarrow y = \frac{A}{K}(P - P_{atm})$$

فشارسنجی متناسب با فشار اتمسفر

۱- سیستم های مرتبه اول (first-order systems)

- سیستم های اندازه گیری مرتبه اول دارای المان های ذخیره هستند و برای تغییرات در ورودی، در خروجی لحظه پاسخ می دهند. (مثال: دماسنج جیوه‌ای سه حالت جیوه است به تعادل دمایی با جسم مورد نظر برسد)

- سوال: مدل ریاضی سیستم های مرتبه اول:

$$a_1\dot{y} + a_0 y = F(t) \rightarrow \tau\dot{y} + y = KF(t)$$

ثابت زمانی (time constant) — خروجی — ورودی

۱- پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله (= تغییر ناگهانی در ورودی)

$$F(t) = A\,U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^- \\ A & t \geq 0^+ \end{cases} \quad , \quad y(0) = y_0$$

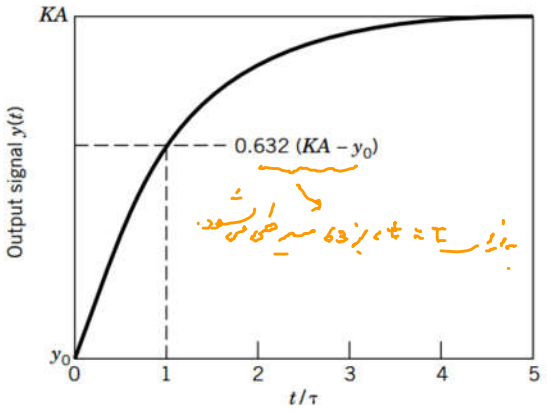
$$\tau\dot{y} + y = KA\,U(t)$$

از شرط اولیه

$$\underbrace{y(t)}_{\text{Time response}} = \underbrace{KA}_{\text{Steady response}} + \underbrace{(y_0 - KA)e^{-t/\tau}}_{\text{Transient response}}$$

پاسخ ماندگار (y_{ss}) — پاسخ گذرا

به صفر می رسد ($t = 5\tau \rightarrow y = 99.3$ درصد)



برای $t = \tau$، پاسخ حدود 63 درصد تغییرات خود را طی می کند.

- τ زمان لازم برای رسیدن خروجی به 63 درصد تغییرات ماندگار و حالت اولیه.

- هر چه پاسخ به ورودی پله سیستم مرتبه اول، ثابت زمانی آن را محاسبه نمود.

۲- پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی سینوسی ساده

$$F(t) = A\sin\omega t \quad , \quad y(0) = y_0$$

$$\tau\dot{y} + y = KA\sin\omega t$$

دامنه ورودی — فرکانس ورودی

$$y(t) = Ce^{-t/\tau} + \frac{KA}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}\omega\tau)$$

با خودش از بین می رود — پاسخ گذرا به صفر می رسد — پاسخ ماندگار سینوسی با همان فرکانس

$$y(t) = Ce^{-t/\tau} + B(\omega)\sin[\omega t + \Phi]$$

$$B(\omega) = \frac{KA}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

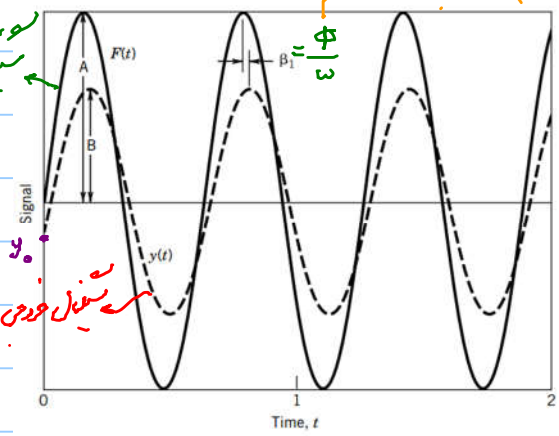
با افزایش ω دامنه خروجی کاهش می یابد.

$$\Phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

با افزایش ω فرکانس، اختلاف فاز افزایش می یابد.

اختلاف فاز همواره بین صفر و $-\frac{\pi}{2}$ رادیان است.

زمینه زمان ($\sin(\omega t+\phi) = \sin(\omega(t+\frac{\phi}{\omega})) = \sin(\omega(t+\beta_1))$)



سیگنال ورودی

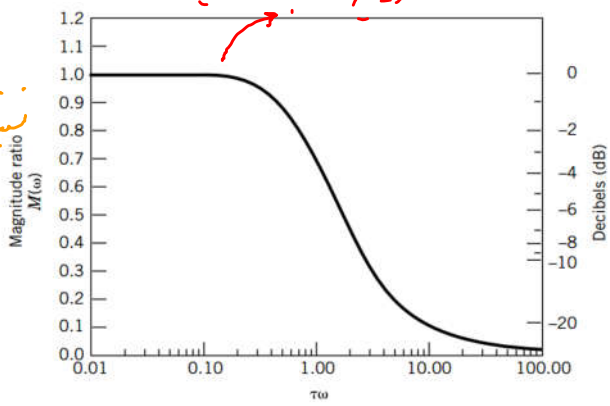
سیگنال خروجی

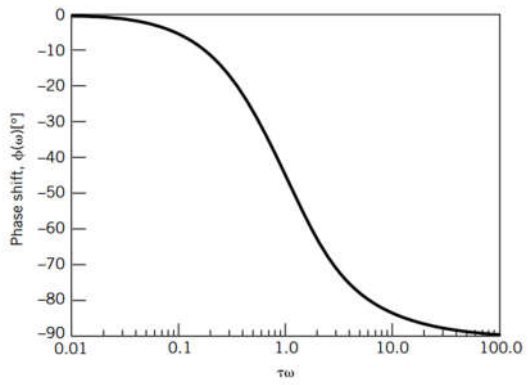
Figure 3.11 Relationship between a sinusoidal input and output: amplitude, frequency, and time delay.

رسم پاسخ فرکانسی معادله دیفرانسیل :

منحنی های پاسخ فرکانسی سیستم های مرتبه اول :

سیستم های مرتبه اول، هیچ وقت تشدید نخواهد شد!





نسبت دامنه خروجی به ورودی

$M = \frac{B}{KA} =$

- توابع $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ نمودار پاسخ فرکانسی سیستم اندازه گیری به ورودی سینوسی ساده است. این توابع و منحنی های مربوط به آن ها به عنوان انرژی دوم در اینجا سیستم های اندازه گیری و مولد سیستم هستند.

در فرکانس های مطلوب $M(\omega) \cong 1$ و $\phi(\omega) \cong 0$ می باشد

پاسخ با تاخیر کم

تولید سیگنال خروجی با دامنه ای نزدیک به ورودی

*خطای دینامیکی : توانایی سیستم اندازه گیری در ایجاد دامنه سیگنال ورودی در خروجی در فرکانس مشخص :

$\delta(\omega) = \frac{B-KA}{KA} = M(\omega) - 1$

- برای سیستم های اندازه گیری مرتبه اول، پهنای باند فرکانسی که در آن نسبت دامنه، برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ باشد ($20\log M(\omega) \geq -3dB$) را به عنوان فرکانس پهنای باند (frequency bandwidth) در نظر می گیرند.

سوال: می‌خواهیم یک سنسور را برای اندازه‌گیری دمای داخل یک محفظه انتخاب کنیم. دمای داخل محفظه با تابع پله‌ای تغییر می‌کند، فرکانس آن تا 5 هرتز باشد، حداکثر خطای سنسور مناسب برای ما چقدر است تا خطای دینامیکی آن بیشتر از 2 درصد نشود.

KNOWN $1 \le f \le 5$ Hz

$|\delta(\omega)| \le 0.02$

ASSUMPTIONS First-order system

$F(t) = A \sin \omega t$

FIND Time constant, τ

$-0.02 \le \delta(\omega) \le 0.02 \Rightarrow 0.98 \le M \le 1.02 \xrightarrow{\max(M)=1} 0.98 \le M \le 1$

$\Rightarrow 0.98 \le M(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \le 1 \Rightarrow 0 \le \omega\tau \le 0.2$

از طرفی: $1 \le f \le 5 \Leftrightarrow 2\pi \le \omega \le 10\pi$

به عنوان عامل بحرانی $\omega = 10\pi \Rightarrow \tau \le 6.4$ ms

سنسورهایی با ثابت زمانی درون محدوده برای هدف این سوال مناسب می‌باشند.

ب) سیستم های مرتبه دوم (second-order system)

- سیستم های اندازه گیری مرتبه دوم دارای خاصیت انرژی می باشند.

- فرم کلی مدل یک سیستم دینامیکی خطی مرتبه دوم تک ورودی $F(t)$ - خروجی y به صورت زیر قابل توصیف است:

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = F(t)$$

معادله فوق را میتوان به فرم استاندارد زیر بازنویسی نمود:

(خروجی (در این فرم ضریب آن را 1 در نظر میگیریم))

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y} + \frac{2\xi}{\omega_n} \dot{y} + y = K F(t) \qquad (*)$$

$$\left(\text{یا} \quad \ddot{y} + 2\xi\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 F(t) \right)$$

(ضریب $\ddot{y}$ را 1 میگیریم)

که در آن: $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ فرکانس طبیعی نامیرای سیستم و

$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ ضریب میرایی (damping ratio) می باشد.

- حل عمومی معادله $(*)$ (در حالت همگن $F(t)=0$) بسته به مقدار ξ، سه حالت مختلف دارد:

1) $0 < \xi < 1$ (underdamped system): $y_h(t) = Ce^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \phi\right)$

(پاسخ گذرای میرای نوسانی (پاسخ زیرمیرای سیستم))

2) $\xi = 1$ (critically damped system): $y_h(t) = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$

(پاسخ میرای بحرانی)

3) $\xi > 1$ (overdamped system): $y_h(t) = C_1 e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1})t} + C_2 e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1})t}$

(پاسخ میرای غیرنوسانی (پاسخ فوق میرا))

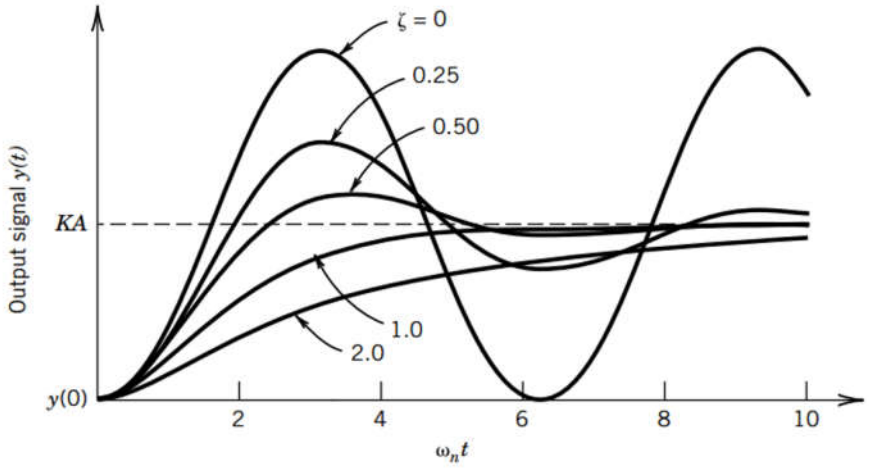
پ ۱) پاسخ سیستم مرتبه دوم به ورودی پله (= تعیین پاسخ در حوزه زمان)

$$F(t) = A\,U(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0^- \\ A & t \ge 0^+ \end{cases} \quad , \quad y(0) = y_0 \ , \ \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

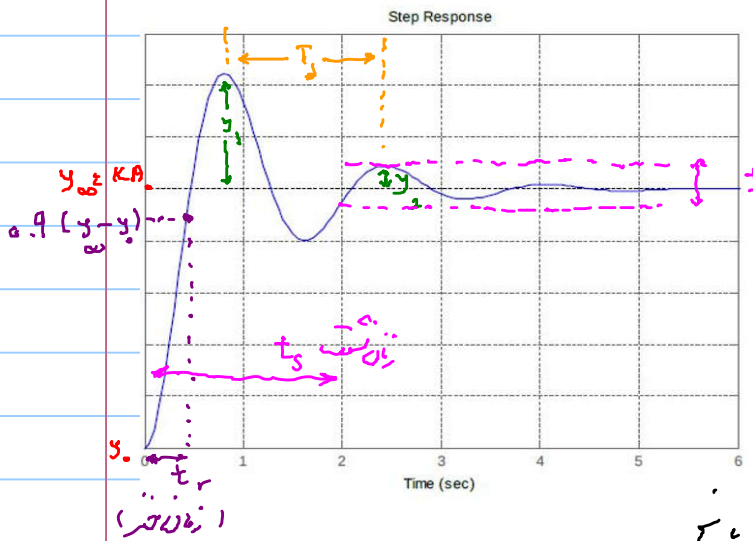
سیستم مرتبه دوم، دو شرط اولیه نیاز است.

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{y} + \frac{2\xi}{\omega_n}\dot{y} + y = KA\,U(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_h + KA$$

پاسخ حالت ماندگار. پاسخ گذرا ($t \to \infty : y_h \to 0$)



- زمانی که ξ کوچک شده، پاسخ سیستم نوسانی است و فرکانس پاسخ را فرکانس تشدید (ringing freq.) می‌نامند.



$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad , \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{1}{f_d}$$

$\pm$ (5٪ یا 2٪) $\times y_\infty$ محدوده

- زمان خیز (rise time): زمان لازم برای رسیدن پاسخ سیستم برای اولین بار به ۹۰٪ مقدار نهایی.

- زمان نشست (settling time): حداقل زمانی که لازم است طول شود تا پاسخ سیستم در محدوده معینی از اطراف مقدار نهایی باقی بماند.

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(2\pi/\ln(y_1/y_2)\right)^2}}$$

$y_1 = (y_{max})_1 - y_\infty$, $y_2 = (y_{max})_2 - y_\infty$

$T_d \rightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\zeta \uparrow \Rightarrow t_r \uparrow$

$\zeta \downarrow \Rightarrow$ overshoot $\uparrow$, $t_s \uparrow$

$\Rightarrow \zeta = 0.7 \quad (0.6 \lesssim \zeta \lesssim 0.8)$

$f(t) = A\sin\omega t$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$

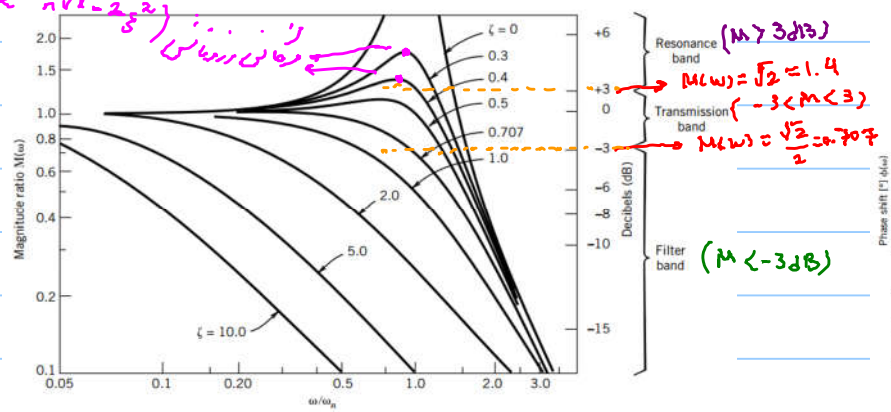
$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{y} + y = KA\sin\omega t \rightarrow y(t) = y_h(t) + B(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$$

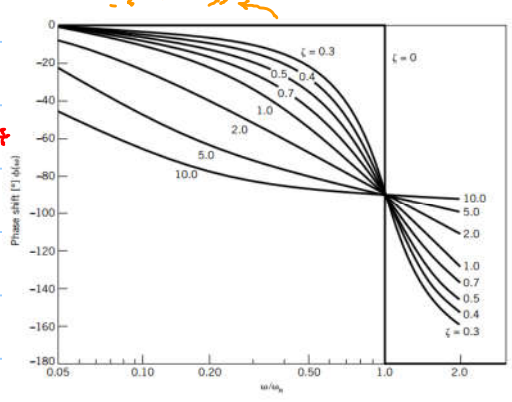
$$B(\omega) = \frac{KA}{\left\{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta\omega/\omega_n\right]^2\right\}^{1/2}}$$

$$\Phi(\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)$$

$M(\omega) = \frac{B(\omega)}{KA}$

$(\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2})$





- تشدید (رزونانس) در اصطلاح، وقوع خروجی با بیشترین دامنه و اختلاف فاز نزدیک به $\frac{\pi}{2}$ - می‌باشد؛ مخدوده

$M(\omega) > 3dB$ ($\equiv \frac{B}{KA} > 1.4$) را باند رزونانس (Resonance band) گویند.

نسبت دامنه خروجی به ورودی

← در سیستم‌های نوسانی کنترل با بیشترین مقدار 0.707 ($\xi > 0.707$) رزونانس رخ می‌دهد.

← اگر ضریب میرایی سیستم صفر شود ($\xi = 0$)، فرکانس رزونانس با فرکانس طبیعی سیستم برابر است و دامنه پاسخ ماندگار در این فرکانس به بینهایت میل می‌کند ($M(\omega) \to \infty$)

- در فرکانس‌های پایین برای سیستم‌های زیرمیرا ($\xi < 1$)، نسبت دامنه (M) نزدیک واحد (1) و اختلاف فاز (ϕ) نزدیک به صفر است. این مشخصه‌ای، محدوده مناسبی برای عملکرد سیستم‌های اندازه‌گیری که اصطلاحاً آن باند عبور (Transmission Band) گفته می‌شود:

$-3dB < M(\omega) < 3dB$ ($\equiv 0.7 < M(\omega) < 1.4$)

- در فرکانس‌های بسیار زیاد، نسبت دامنه نزدیک به صفر بوده و اختلاف فاز به π - میل می‌کند. به عبارتی در این محدوده سیستم، سیگنال ورودی را از خود عبور نمی‌دهد که به باند مسدود (Filter Band) موسوم است ($M(\omega) < -3dB$)

- مثال: جهت اندازه‌گیری جرم، می‌خواهیم یک سنسور ساخته شود. می‌دانیم که فرکانس سیگنال‌های ورودی به سیستم اندازه‌گیری ما کمتر از $10\ Hz$ می‌باشد. مطلوب است انجام مشخصات قابل قبول برای این سیستم اندازه‌گیری به گونه‌ای که خطای دینامیکی ($\delta = |M(\omega) - 1|$) کمتر از 5 باشد. ($\xi, \omega_n = ?$)

$f \leq 10\ Hz \Rightarrow \omega \leq 62.8 \frac{rad}{s}$

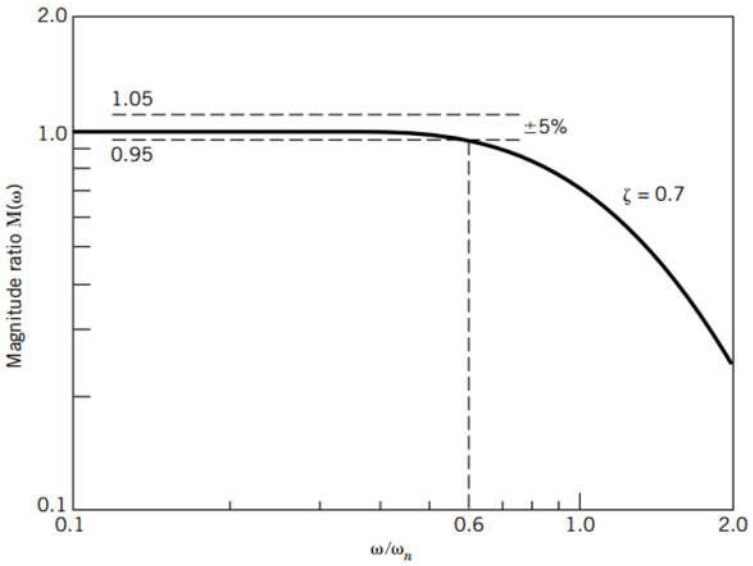
$|\delta(\omega)| \leq 0.05 \Rightarrow 0.95 \leq M(\omega) \leq 1.05$

$$\Rightarrow \quad 0.95 \leq \frac{1}{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \leq 1.05$$

$\xi = 0.7$ (بیشترین) $\Longrightarrow$

$$0 \leq \frac{\omega}{\omega_n} \leq 0.6 \quad \Longrightarrow \quad \omega \leq 628 \quad \Longrightarrow \quad \omega_n \geq 1047 \ \frac{rad}{s}$$

بنابراین یک سیستم اندازه‌گیری مرتبه دوم با $\xi = 0.7$ و $\omega_n \geq 1047 \ \frac{rad}{s}$ خطای دینامیکی کمتر از 5٪ (در حالت ماندگار) برای ورودی‌های سینوسی با فرکانس کمتر از 100Hz خواهد داشت.



* ورودی‌های چندگانه دلخواه

- فرض کنید ورودی یک سیستم اندازه‌گیری به صورت مجموع توابعی با فرکانس‌های مختلف باشد:

$$F(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N \to \infty} A_k \sin \omega_k t$$

(ورودی)

در این صورت با توجه به فرض خطی بودن سیستم، سهم "پاسخ ماندگار" سیستم به هر یک از خواهد بود:

$$y_{steady}(t) = KA_0 + \sum_{k=1}^{N \to \infty} B(\omega_k) \sin\left(\omega_k t + \phi(\omega_k)\right)$$

$$B(\omega_k) = K A_k M(\omega_k) = \frac{KA}{\left\{\left[1-(\omega_k/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta\omega_k/\omega_n\right]^2\right\}^{1/2}} \quad , \quad \Phi(\omega_k) = \tan^{-1}\left(-\frac{2\zeta\omega_k/\omega_n}{1-(\omega_k/\omega_n)^2}\right)$$

مثال: پاسخ پله یک سیستم اندازه‌گیری مرتبه دوم با مشخصات $K=1$ ، $\xi = 2$ ، $\omega_n = 628 \frac{rad}{s}$ به ورودی

$F(t) = 5 + 10\sin 25t + 20\sin 400t$ را بیابید.

$$y(t) = 5K + 10K\,M(25\tfrac{rad}{s})\sin\left(25t + \phi(25\tfrac{rad}{s})\right) + 20K\,M(400\tfrac{rad}{s})\sin\left(400t + \phi(400\tfrac{rad}{s})\right)$$

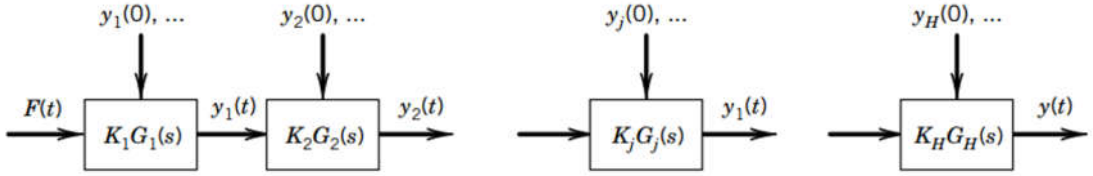
$M(25\frac{rad}{s}) \rightarrow 0.99$ ، $\phi(25\frac{rad}{s}) \rightarrow -9.1^\circ$ ، $M(400\frac{rad}{s}) \rightarrow 0.39$ ، $\phi(400\frac{rad}{s}) \rightarrow -77^\circ$

$$\Rightarrow y(t) = 5 + 9.9\sin(25t - 9.1^\circ) + 7.8\sin(400t - 77^\circ)$$

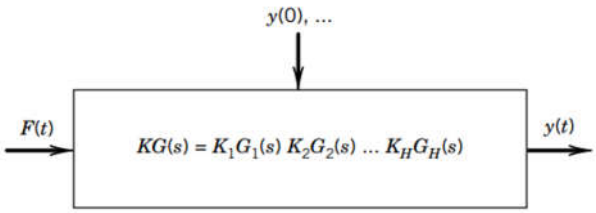
* سیستم های اندازه‌گیری کوپل شده

- معمولاً یک سیستم اندازه‌گیری از ابزارهای زیادی تشکیل شده است (واحد حس کننده، اصلاح کننده سیگنال، نمایشگر)

سیگنال در این ابزارها زنجیره‌ها یا شبکه‌هایی را دنبال می‌کند و سیگنال ورودی در یک مرحله، سیگنال ورودی مرحله بعدی خواهد بود.



- در این صورت سیستم معادل به فرم زیر خواهد بود:



$K = K_1 K_2 \ldots K_n$

$M(\omega) = M_1(\omega)\,M_2(\omega)\ldots M_n(\omega)$

$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \ldots + \phi_n(\omega)$