فرم های درجه دوم یا مجذوری (Quadratic)

- هر عبارت های به شکل زیر شامل جملات درجه دوم (همگن) برحسب x_1 تا x_n فرم های درجه دوم گویند:

$$H_A = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

- حال متغیر y_i را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$y_i = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

- در این صورت داریم:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \rightarrow A_{n\times n}X_{n\times 1} = Y_{n\times 1}$$

ماتریس متقارن

* توجه داشته باشید که $H = X^TAX$

- در بسیاری از کاربردهای هندسی، با دنبال این هستیم که با یافتن یک ماتریس تبدیل متغیرها را به فرم کانونی (فقط شامل x_i^2 و بدون x_{ij} $(i\neq j)$) درآوریم.

- اگر رابطه بین x و x' به صورت $\underline{X = QX'}$ باشد داریم:

$$H_A = x^T A x = (Qx')^T A (Qx') = x'^T \underbrace{Q^T A Q}_{A'} x'$$

$$= x'^T A' x'$$

حال ما در پی این هستیم که A' قطری باشد. ⟵ $\boxed{Q \text{ چه باشد؟}}$

- اگر ماتریس A متقارن باشد، می‌توان n مقدار ویژه و بردار ویژه مستقل به صورت زیر یافت:

$$\begin{cases} A e_1 = \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ A_n e_n = \lambda_n e_n \end{cases}$$

می‌گیریم: $Q = [e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ e_{1n} & e_{2n} & & e_{nn} \end{bmatrix}$

$$AQ = A[e_1 \mid e_2 \cdots e_n] = [Ae_1 \mid Ae_2 \mid \cdots \mid Ae_n]$$

$$= [\lambda_1 e_1 \mid \lambda_2 e_2 \mid \cdots \mid \lambda_n e_n] = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AQ = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{Q^{-1}} A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_i \delta_{ij}]$$

چون بردارهای ویژه مستقل از هم هستند پس $|Q| \neq 0$ و Q^{-1} وجود دارد.

- بدین ترتیب ماتریس A توسط ماتریس Q قطری شد و عناصر $\underline{Q^{-1}AQ}$ همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند. البته ما می‌خواستیم که $\underline{Q^TAQ}$ قطری شود، لذا اگر $Q^{-1}=Q^T$ یا $Q^TQ=I$ در این صورت نتیجه مطلوب حاصل شده است.

$$Q^TQ = [q'_{ik}][q_{kj}] = \left[\sum_{k=1}^{n} q'_{ik} q_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} q_{ki} q_{kj}\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} e_{ki} e_{kj}\right] = \langle e_i , e_j \rangle = [\delta_{ij}] = I$$

(q ها، e ها) (اینها همان بردارهای یکه e_i هستند)

- بدین ترتیب با این انتقال:

$$H_A = X^TAX = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$$

* به ماتریسی که ستون‌های آن تشکیل از n بردار ویژه‌ی مستقل ماتریس A هستند، $\boxed{\text{ماتریس مودال}}$ A گفته می‌شود. / اگر بردارهای ویژه متعامد یکه باشند، ماتریس مودال ارتونرمال است که در این شکل $P=Q$ یک ماتریس مودال ارتونرمال می‌باشد.

* توجه: ماتریس مودال Q تنها ماتریسی نیست که منجر به فرم Quadratic می‌شود؛ اما تنها ماتریسی هست که خاصیت مطلوب $Q^T=Q^{-1}$ را دارد (در حالی که H را به فرم کانونی درمی‌آورد)

- هرگاه فرم درجه دوم حقیقی $H_A = X^T A X$ (که در آن A ماتریس حقیقی و متقارن است) برای همه مقادیر حقیقی متغیرهای x_i غیرمنفی باشد و فقط در حالتی که همه n متغیر x_i صفر باشند، صفر شود، آنگاه فرم محدودی H را مثبت معین (Positive Definite) می‌نامیم $\Longleftrightarrow$ در این صورت ماتریس A را نیز مثبت معین گوییم.

← به راحتی می‌توان نشان داد که اگر عبارت $H_A = X^T A X$ با تغییر متغیر نامنفرد $(X = QX' = PX')$ به فرم کانونی درآید، در این صورت اگر کلیه ضرایب مثبت باشد، آنگاه A مثبت معین (نسبت به X' ها) ($\equiv$ مقادیر ویژه A) خواهد بود. اما از $X' = Q^{-1}X$ نتیجه می‌شود که همواره هر بردار حقیقی X متناظر با یک بردار حقیقی X' است و داریم ($X=0 \Longleftrightarrow X'=0$)؛ بنابراین A نسبت به متغیرهای x_1, x_n نیز مثبت معین است.

- اگر ضریب یکی از جملات مرتبه دوم (≡ حداقل یکی از مقادیر ویژه) x_i^2 صفر باشد، فرم

تحت‌نام مثبت معین نیست و آن را مثبت نیمه‌معین (Positive Semi-Definite)

می‌نامیم.

* نتیجه: یک ماتریس (یا یک فرم درجه 2) مثبت معین است اگر و فقط اگر تمام

مقادیر ویژه ماتریس A مثبت باشند. (اگر مقادیر ویژه نامنفی باشند، فرم درجه 2،

مثبت نیمه‌معین است)

- می‌توان نشان داد اگر حداقل یکی از فرم های درجه 2 زیر (تشکیل شده

از ماتریس های متقارن A و B) مثبت معین باشد، آنگاه همواره می‌توان

با تبدیل مناسبی هر دو فرم را به طور همزمان به صورت ترکیب خطی کانونی مربعات متغیرهای

جدید نوشت.

$$\left(\text{فرض}: \begin{cases} A = A^T \\ B = B^T \end{cases} \right)$$

$$H_A = X^T A X$$
$$H_B = X^T B X$$

$\longrightarrow$ حکم: S ای به گونه‌ای وجود دارد که تغییر متغیر $X' = SX$ هر دو فرم را کانونی کند

ج: چون B ماتریس مثبت معین است، لذا می‌توان با تغییر متغیر $X = QY$

(که Q ماتریس مودال B باشد)، H_B به صورت زیر در می‌آید:

$$H_B = X^T B X = (QY)^T B (QY) = Y^T \underbrace{Q^T B Q}_{\text{قطری}} Y$$

$$\Rightarrow H_B = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$ → که λ_iها مقادیر ویژه

ماتریس B هستند و چون B مثبت معین است

همه آن‌ها + می‌باشند

- با توجه به + بودن λ_iها، متغیر جدید η_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta_i = \sqrt{\lambda_i}\, y_i \Longrightarrow H_B = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_n^2 = \eta^T \eta \quad (**)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \{y\}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & \cdots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix}}_{M} \eta$$

از طرفی:

$$H_A = X^T A X = (QY)^T A (QY) = Y^T (Q^T A Q) Y$$

$$= (M\eta)^T Q^T A Q (M\eta) = \eta^T \underbrace{(M^T Q^T A Q M)}_{G} \eta$$

$$\Rightarrow H_A = \eta^T G \eta \quad (*)$$

ماتریس G متقارن است زیرا :

$$G^T = (M^TQ^TAQM)^T = (QM)^T(M^TQ^TA)^T =$$

$$M^TQ^TA^T(M^TQ^T)^T = M^TQ^TAQM = G$$

$$\Leftrightarrow \quad G^T = G \quad \Longleftrightarrow$$ G متقارن

با توجه به اینکه G متقارن است می‌توان ماتریس عمود (ارتوگونال) زیر را ایجاد نمود.

این ماتریس را R می‌نامیم (به گونه‌ای که R^TGR فرم قطری داشته باشد

شامل مقادیر ویژه ماتریس G باشد)

$\eta = R\alpha$ بدین ترتیب تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم :

داریم : $\xrightarrow{\text{با جایگذاری در } (*)}$

$$H_A = \eta^T G \eta = (R\alpha)^T G (R\alpha)$$

$$= \alpha^T \underbrace{(R^TGR)}_{\text{فرم قطری}} \alpha = \underbrace{\gamma_1\alpha_1^2 + \gamma_2\alpha_2^2 + \cdots + \gamma_n\alpha_n^2 = H_A}$$

(که γ_i ها مقادیر ویژه G هستند)

همچنین

$$\xrightarrow{(**)} H_B = \eta^T\eta = (R\alpha)^T(R\alpha) = \alpha^T \underbrace{(R^TR)}_{I} \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{H_B = \alpha^T\alpha = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$$

می‌توان نوشت با ماتریس تبدیل :

$$X = QY = QM\eta = QMR\alpha \Rightarrow \boxed{X = (QMR)\alpha}$$

ماتریس تبدیل کل K $\quad (K = QMR)$

ماتریس مودال ارتونرمال B

ماتریس مودال ارتونرمال G $\quad (G = M^T Q^T A Q M)$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix}$$

(از ریشه مقادیر ویژه B)

می‌توان همزمان هر دو H_A و H_B را قطری‌سازی کرد.

معادله مقدار ویژه کلی (Generalized Characteristic Value Prob.)

- در برخی از مسائل، ما با مسائل مقدار ویژه عمومی تر به فرم زیر روبرو هستیم:

$$\boxed{A\underset{\sim}{x} = \lambda B\underset{\sim}{x}} \quad (*) \qquad (\longleftarrow A\underset{\sim}{x}=\lambda\underset{\sim}{x} \text{ به جای})$$

- معادله مشخصه مربوط به $(*)$ به صورت $|A-\lambda B|=0$ بدست می آید.

- در بسیاری از مسائل کاربردی، A و B متقارن هستند. (ما هم همین فرض را داریم)

- در این بخش به دنبال این هستیم که نتایج قبلی را که برای معادله $A\underset{\sim}{x}=\lambda\underset{\sim}{x}$ استخراج کردیم، برای معادله کلی $(*)$ بدست آوریم:

- اگر λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه متمایز باشند، داریم:

متقارن

$$\begin{cases} A\underset{\sim}{x}_1 = \lambda_1 B\underset{\sim}{x}_1 \xrightarrow{T} (A\underset{\sim}{x}_1)^T = \lambda_1 (B\underset{\sim}{x}_1)^T \xrightarrow[\text{از راست}]{\times \underset{\sim}{x}_2} \underset{\sim}{x}_1^T A^T \underset{\sim}{x}_2 = \lambda_1 \underset{\sim}{x}_1^T B^T \underset{\sim}{x}_2 \\ A x_2 = \lambda_2 B x_2 \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times \underset{\sim}{x}_1^T} \underset{\sim}{x}_1^T A \underset{\sim}{x}_2 = \lambda_2 \underset{\sim}{x}_1^T B \underset{\sim}{x}_2 \end{cases}$$

حال اگر از تقارن ماتریس های A و B استفاده نماییم یعنی: $\begin{cases} A^T = A \\ B^T = B \end{cases}$

داریم:

$$\lambda_2 \underset{\sim}{x}_1^T B \underset{\sim}{x}_2 = \lambda_1 \underset{\sim}{x}_1^T B x_2$$

$$\Longrightarrow (\lambda_2-\lambda_1)(x_1^T B x_2) = 0 \xrightarrow{\lambda_1 \neq \lambda_2} \boxed{x_1^T B x_2 = 0}$$

یعنی بردارهای مقادیر ویژه متمایز $(*)$، بردارهای ویژه متناظر، نسبت به B، بر هم عمودند!

$$\Longrightarrow \quad u_1^T B u_2 = 0 \quad \text{یا} \quad u_2^T B u_1 = 0$$

مشابهاً می‌توان گفت که بردارهای ویژه u_1 و u_2 متناظر با مقادیر ویژه λ_1 و λ_2

نسبت به A هم بر هم عمود هستند.

$$\rightarrow \quad u_1^T A u_2 = 0 \quad \text{یا} \quad u_1^T B u_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \langle u_1, u_2 \rangle_A = 0 \\ \langle u_1, u_2 \rangle_B = 0 \end{cases}$$

ضرب نقطه‌ای u_1 و u_2 نسبت به A (یا B) برابر صفر است پس دو بردار نسبت به ماتریس A (یا B) بر هم عمودند

- طول بردار u در حالت کلی ($\equiv$ در صورت وجود ماتریس B) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_B^2(u) = u^T B u = \langle u, u \rangle_B$$

- برای اینکه طول بردار u نسبت به ماتریس B یک مقدار مثبت باشد، بایستی ماتریس B مثبت معین باشد.

- در ادامه فرض می‌کنیم که ماتریس A متقارن حقیقی و ماتریس B متقارن حقیقی مثبت معین باشد.

- در این حالت (مشابه قبل) می‌توان نشان داد که مقادیر ویژه معادله مشخصه کلی

$A\underset{\sim}{x} = \lambda B \underset{\sim}{x}$ حقیقی هستند.

بردار حقیقی مثبت معین — مقدار حقیقی

- می‌توان n بردار ویژه را نسبت به B متعامد کرد و طول همه آن‌ها را یکه نمود (= آن‌ها را نسبت به B یکه نمود)

$$\Rightarrow \boxed{\langle e_i , e_j \rangle_B = \delta_{ij} \left(= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \right)}$$

- ماتریس مودال ارتونرمال M متناظر با $A\underset{\sim}{x} = \lambda B \underset{\sim}{x}$ بر اساس بردارهای ویژه معادله‌ی مشخصه به صورت نرمال تشکیل است:

$$A \underset{\sim}{e_i} = \lambda_i B \underset{\sim}{e_i} \qquad (i=1,\dots,n)$$

$$\Rightarrow M = [\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, \dots \,|\, e_n \,]$$ ماتریس مودال

$$\Rightarrow AM = BM \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = BMD$$

ماتریس قطری مقادیر ویژه کلی

$$\langle e_i , e_j \rangle_B = \delta_{ij} \Longrightarrow \boxed{M^T B M = I}$$

- همانطور که بعداً اشاره شده، می‌توان دو ماتریس متقارن را به طور همزمان (یکی + معین) قطری کرد.

- با تغییر متغیر $X = MY$ ، می‌توان دو فرم زیر را به حالت کانونی تبدیل نمود:

$$H_A = x^T A x \Rightarrow H_A = (My)^T A (My) = y^T M^T \underbrace{A M}_{BMD} y$$

$$\Rightarrow H_A = y^T \underbrace{M^T B M}_{I} D y \Rightarrow \boxed{H_A = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}$$

مقادیر ویژه ماتریس D

$$H_B = x^T B x = (My)^T B (My) = y^T \underbrace{M^T B M}_{I} y = y^T y$$

$$\Rightarrow \boxed{H_B = y^T y = y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

* توجه: دترمینان ماتریس M برابر است با:

$$|M| = \pm \frac{1}{\sqrt{|B|}}$$

- بنابراین با فرض مثبت معین بودن B ، دترمینان M غیر صفر است و

لذا M^{-1} وجود دارد.

$$y = M^{-1} x$$

$$M^T B M = I \xrightarrow[\text{از راست}]{\times M^{-1}} \boxed{M^{-1} = M^T B}$$

- نکته: اگر A و B هر دو مثبت معین باشند ، آنگاه مقادیر ویژه معادله مشخصه $Ax = \lambda Bx$ همگی + هستند.

زیرا:

$$A e_i = \lambda_i B e_i$$

$$\Rightarrow \underbrace{e_i^T A e_i}_{+} = \lambda_i \underbrace{e_i^T B e_i}_{+} \Rightarrow \boxed{\lambda_i > 0}$$

(با توجه به مثبت بودن $e_i^T B e_i$ و $e_i^T A e_i$ باید λها نیز + باشند)

- از طرفی چون بردارهای e_1 تا e_n مستقل خطی هستند، هر بردار در فضای n بعدی را می‌توان به صورت ترکیب خطی آن‌ها نوشت:

$$\circledast \quad V = \alpha_1 e_1 + \alpha e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

α_k ها چگونه محاسبه می‌شوند؟

$$\xrightarrow{B \times \circledast} BV = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k B e_k$$

$$\rightarrow e_r^T B V = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_r^T B e_k = \alpha_r$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_r = e_r^T B V = \langle e_r, V \rangle_B}$$

- یکی از کاربردها مهم رابطه معادلات مشخصه کلی در حالتی است که ماتریس B قطری باشد:

$$B = G = \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & g_2 \ddots & \\ 0 & & g_n \end{bmatrix}$$

در این حالت، معادله‌ی $A\underset{\sim}{x} = \lambda B \underset{\sim}{x}$ به فرم زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda_1 g_1 x_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda_n g_n x_n \end{cases}$$

$a_{ij} = a_{ji}$ (ماتریس A متقارن)

- در این حالت اگر g_1 تا g_n همگی + باشند ($\equiv G$ مثبت معین باشد)

آنگاه $L^2_G(x)$ مثبت خواهد بود.

- سوالی وجود دارد که معادله $\boxed{A'x = \lambda x}$ ** که در آن A' ماتریس ریاضی غیرمتقارن است را با یافتن ماتریس G قطری به شکل زیر تغییر داد:

$$GA' = A \Rightarrow A' = G^{-1}A \qquad \begin{cases} A = A^T & (A \text{ متقارن}) \\ G \to & (\text{ماتریس قطری با عناصر } +) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'x = \lambda x \xrightarrow{A' = G^{-1}A} G^{-1}Ax = \lambda x \Rightarrow \boxed{A\underset{\sim}{x} = \lambda G \underset{\sim}{x}}$$

معادله **

- نکته: اگر علاوه بر متقارن بودن A و B، B معکوس‌پذیر باشد ($B \equiv$ غیرتکین)

و B^{-1} موجود باشد داریم:

$$Ax = \lambda Bx \Rightarrow \boxed{\underbrace{B^{-1}A}_{C} x = \lambda x} \Rightarrow Cx = \lambda x$$

معادله یافتن مقادیر ویژه عادی

توابع ماتریس متقارن (Functions of Symmetric Matrix)

- بحث ما در اینجا بیشتر بر روی ماتریس‌های متقارن حقیقی متمرکز است (زیرا در بیشتر کاربردهای مهندسی استفاده شده‌اند).

- اگرچه حاصل جمع و تفریق دو ماتریس متقارن، متقارن است؛ اما این نکته در مورد ضرب دو ماتریس متقارن لزوماً برقرار نیست!

- توان‌های مثبت صحیح هر ماتریس مربعی (چه متقارن و چه نامتقارن) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A^2 \quad (\text{یا } A^2 \times A)$$

$$\vdots$$

$$A^{n+1} = A \times A^n$$

به عبارتی $\Longrightarrow$

$$\boxed{A^r \cdot A^s = A^s \cdot A^r = A^{r+s}}$$

r و s هر دو عدد صحیح مثبت (*)

(اگر A^{-1} وجود داشته باشد برای هر r و s صحیح چه +، - یا صفر برقرار است)

- توان‌های صحیح منفی به شرط وجود A^{-1} (*) قابل تعریف است:

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

تعریف: $\boxed{A^0 = I}$

نتیجه: برای هر دو عدد صحیح (مثبت، منفی یا صفر) رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$A^r A^s = A^s A^r = A^{r+s}$$

* توجه: اگر ماتریس A متقارن باشد، ماتریس A^n به ازای هر عدد صحیح n متقارن است.

توابع چندجمله‌ای ماتریسی (Polynomial Function):

- توابع چندجمله‌ای ماتریس A به صورت ترکیب خطی تعداد متناهی از توان‌های صحیح غیرمنفی ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(A) = \alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \dots + \alpha_m I$$

- اگر A از مرتبه n باشد و مقادیر ویژه‌ی آن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد (که لزوماً متمایز نیستند) و بردارهای ویژه‌ی آن‌ها $u_1 \dots u_n$ باشد، داریم:

$$A u_i = \lambda_i u_i$$

اگر طرفین رابطه فوق را از چپ در A ضرب کنیم داریم:

$$A^2 u_i = \lambda_i A u_i = \lambda_i \lambda_i u_i = \lambda_i^2 u_i$$

و با تکرار این روند می‌توان نتیجه گرفت:

$$\boxed{A^r u_i = \lambda_i^r u_i}$$ (r هر عدد صحیح +)

مشابهاً اگر A غیرتکین باشد داریم :

$$A^{-1}Au_i = \lambda_i A^{-1}u_i \Rightarrow I\frac{1}{\lambda_i}u_i = A^{-1}u_i \Rightarrow$$

$$A^{-1}u_i = \frac{1}{\lambda_i}u_i$$

ولذا با ضرب در A^{-1} می‌توان رابطه (+) را به حالتی که r صحیح مثبت یا منفی است تعمیم داد.

* نتیجه : اگر λ_i مقدار ویژه متناظر با بردار ویژه u_i برای ماتریس A باشد، λ_i^r مقدار ویژه متناظر با u_i برای ماتریس A^r است.

* توجه : ممکن است که A^r بردار ویژه‌ای داشته باشد که A نداشته باشد!

مثال :

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \to \begin{vmatrix}1-\lambda&0\\0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\to \begin{cases}\lambda_1=1 \Rightarrow u_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ \lambda_2=-1 \Rightarrow u_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$$

اما $A^2=I$ دارای دو مقدار ویژه تکراری $\lambda_1=\lambda_2=1$ است و تمامی بردارهای غیرصفر در صفحه بردارهای ویژه A^2 هستند!)

با این مقدمه به بحث قطری‌سازی ماتریس‌ها باز می‌گردیم :

- چند جمله‌ای درجه m از ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید: (چند جمله‌ای ماتریسی)

$$P(A) = \alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} A + \alpha_m I$$

حال اگر طرفین چند جمله‌ای $P(A)$ را در هر بردار ویژه u_i ماتریس A در نظر بگیریم داریم:

$$P(A)\,u_i = \left[\alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \cdots + \alpha_m I\right] u_i$$

$$= \alpha_0 A^m u_i + \alpha_1 A^{m-1} u_i + \cdots + \alpha_m u_i$$

$$= \alpha_0 \lambda_i^m u_i + \alpha_1 \lambda_i^{m-1} u_i + \cdots + \alpha_m u_i$$

$$= \left(\alpha_0 \lambda_i^m + \alpha_1 \lambda_i^{m-1} + \cdots + \alpha_m\right) u_i$$

$$= P(\lambda_i)\, u_i$$

اسکالر (حاصل چند جمله‌ای به ازای λ_i)

یک ماتریس نیست

$$\boxed{P(A)\,u_i = P(\lambda_i)\,u_i} \quad (++)$$

ماتریس A

یک بردار ویژه A

اگر λ_i مقدار ویژه A باشد، $P(\lambda_i)$ مقدار ویژه $P(A)$ است

معادله ماتریسی $(P(A) - \mu I)\,x = 0$ دارای جواب غیرصفر است اگر $\mu = P(\lambda_i)$ و در این حالت جواب معادله (به عبارتی x) ضریبی از بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ_i است.

- بنابراین اگر A یک ماتریس متقارن باشد، آنگاه همگی بردارهای ویژه A به $P(A)$ تعلق دارند و اگر λ_i مقدار ویژه A باشد، $P(\lambda_i)$ مقدار ویژه $P(A)$ است.

- حال می‌خواهیم نشان دهیم که $\boxed{\text{هر ماتریس متقارن در معادله مشخصه خود صدق می‌کند}}$:

- برای اینکار ابتدا معادله مشخصه ماتریس A یعنی $|A - \lambda I| = 0$ را در نظر بگیرید:

$$F(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_n$$

چندجمله‌ای درجه n

در این صورت $F(\lambda)$ یک چندجمله‌ای برحسب λ از درجه n است که ریشه‌هایی آن همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند و لذا اگر $\underset{i=1,\dots,n}{\lambda = \lambda_i}$ آنگاه $\underline{F(\lambda_i) = 0}$.

می‌توان F را به صورت چندجمله‌ای درجه n نشان داد و با استفاده از (++) می‌توان نوشت: $\underset{i=1,\dots,n}{F(\lambda_i) u_i = F(A) u_i}$. حال اگر ماتریس B را به صورت $B = F(A)$ تعریف کنیم نتیجه خواهیم گرفت که معادله $B\underline{x} = 0$ دارای n پاسخ مستقل خطی $x_1 = u_1$، ...، $x_n = u_n$ است. از طرفی B یک ماتریس مربعی مرتبه n است، لذا رتبه (رنک) ماتریس B باید برابر با $n - n = 0$ گردد و لذا مجبوراً است که $\underline{B=0}$ شود $\Longleftarrow$

$$\underline{B = 0} \Rightarrow \boxed{F(A) = 0}$$

یعنی هر ماتریس متقارن در معادله مشخصه خود صدق می کند. این نتیجه جالب به عنوان قضیه کیلی-همیلتون شناخته می شود.

چون ماتریس های نامتقارن لزوماً دارای n بردار ویژه مستقل خطی نیستند، لذا اثبات فوق در مورد ماتریس های نامتقارن قابل استفاده نیست. اما با استفاده از روش های متفاوتی می توان نشان داد که قضیه کیلی-همیلتون برای هر ماتریس مربعی (چه متقارن و چه غیرمتقارن!) صادق است! :)

- مثال: نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ در معادله مشخصه خودش صدق می کند.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Rightarrow F(A) = A^2 - 4A + 3I$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad -4A = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}, \quad 3I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(A) = A^2 - 4A + 3I = 0 \checkmark$$

(برقرار است)

نکته: با استفاده از قضیه کیلی-همیلتون می‌توان گفت که هر توان صحیح + ماتریس A و در نتیجه هر چندجمله‌ای از A را می‌توان به صورت ترکیب خطی از ماتریس‌های $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ نوشت (n مرتبه ماتریس A است)

به عنوان مثال، در ماتریس مثال قبل داریم:

$$n=2 \rightarrow P(A) = \alpha_1 A + \alpha_2 I$$

$$A^2 = 4A - 3I$$

$$A^3 = A(4A-3I) = 4A^2 - 3A = 4(4A-3I) - 3A$$

$$\Rightarrow A^3 = 13A - 12I$$

$$A^2 = 4A - 3I \xrightarrow{\times A^{-1}} A = 4I - 3A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{4}{3} I - A$$

روش کلی برای تعیین ضرایب بسط A^k ها برحسب $I, A, \ldots, A^{n-1}$ ها)

دانستیم که هر توان صحیحی از ماتریس A را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از ماتریس‌های $I, A, \ldots, A^{n-1}$ نوشت. سوال اینجاست که چگونه می‌توان ضرایب این ترکیب خطی را تعیین نمود.

فرض کنید که مقادیر ویژه ماتریس A متمایز باشند. تقسیم چندجمله‌ای دلخواه $P(A)$ را

می‌توان به صورت ترکیب خطی I ، A ، ... ، A^{n-1} نوشت:

$$P(A) = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \cdots + c_n I \quad (*)$$

یک روش برای تعیین ضرایب این است که n مقادیر ویژه متمایز را به صورت زیر

در P (به شکل $P(\lambda)$) جایگذاری کنیم:

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_1^{n-2} + \cdots + c_n \\ P(\lambda_2) = c_1 \lambda_2^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-2} + \cdots + c_n \\ \vdots \\ P(\lambda_n) = c_1 \lambda_n^{n-1} + c_2 \lambda_n^{n-2} + \cdots + c_n \end{cases}$$

n معادله و n مجهول داریم که

از آن c_i ها محاسبه می‌شوند

روش دوم: روش دیگری هم برای تعیین ضرایب وجود دارد. در این روش، چندجمله‌ای

را در ابتدا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P(A) = \; & d_1\big((A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)\cdots(A-\lambda_n I)\big) && \leftarrow \text{فاقد } (A-\lambda_1 I) \\ & + d_2\big((A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)\cdots(A-\lambda_n I)\big) && \leftarrow \text{فاقد } (A-\lambda_2 I) \\ & + \cdots && \vdots \\ & \vdots \\ & + d_n\big[(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_{n-1} I)\big] && \leftarrow \text{فاقد } (A-\lambda_n I) \end{aligned}$$

در اینجا d_i ها ضرایب مجهولی هستند که نسبت به $P(A)$ عوض می‌شوند.

- برای تعیین d_1 تا d_n داریم :

$$P(\lambda_i) = d_i \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{d_i = \frac{P(\lambda_i)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)}}$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(\lambda_k)\, Z_k(A)$$

$$Z_k(A) = \frac{\prod_{i \neq k} (A - \lambda_i I)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)}$$

فرمول سیلوستر

* توضیح : موقعی که مقادیر ویژه تکراری هستند، ملاحظات خاصی لازم است (که ما زیرا شاره به آن‌ها خودداری می‌کنیم.)

* مزیت فرمول سیلوستر این است که $Z_k(A)$ فقط به ماتریس A وابسته است و برای محاسبه آن نیازی به P نیست. اگر P را عوض کنیم، $Z_k(A)$ ها تغییری نمی‌کنند.

مثال) در مثال قبلی $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، A^3 را با استفاده از فرمول سیلوستر محاسبه کنید.

$$A_{2\times 2} \Longrightarrow \overset{P(A)}{=} A^3 = \sum_{k=1}^{2} P(\lambda_k)\, Z_k(A)$$

$$\begin{cases} Z_1(A) = \dfrac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2} = \dfrac{A-3I}{1-3} = \dfrac{-1}{2}A + \dfrac{3}{2}I \\[2ex] Z_2(A) = \dfrac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1} = \dfrac{1}{2}A - \dfrac{1}{2}I \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A^3 = P(1)Z_1(A) + P_2 Z_2(A) = 1^3\left(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) + 3^3\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{A^3 = 13A - 12I}$$ (همان پاسخ قبل)

- با این حساب، A^{40} چگونه است؟

تعریف سری توانی:

پس از تعریف چندجمله‌ای‌ها، حال می‌توانیم با تعریف سری‌های بی‌نهایت، با فرض همگرایی، سری توانی ماتریسی را نیز به صورت زیر تعریف نمائیم

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A^m = \lim_{M\to\infty} \sum_{m=0}^{M} \alpha_m A^m$$

نکته: از آنجائی که برای یک ماتریس $n\times n$ می‌توان هر چندجمله‌ای دلخواه را به صورت ترکیب خطی A^{n-1} تا A^0 نوشت، بنابراین سری بالا را هم می‌توان به صورت ترکیب خطی A^{n-1} تا A^0 نوشت.

شکل تابع e^A (ماتریس nxn ←) را به صورت :

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

می‌توان نوشت و دارد که یک سری همگرا است.

- فرض کنید A یک ماتریس 2x2 است. e^A را برحسب A^0 و A^1 بدست آورید.

$$P(A) = e^A = \underbrace{e^{\lambda_1}}_{P(\lambda_1)} Z_1(A) + \underbrace{e^{\lambda_2}}_{P(\lambda_2)} Z_2(A)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1(A) = \dfrac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2} \\ Z_2(A) = \dfrac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{e^A = e^{\lambda_1}\left(\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}\right) + e^{\lambda_2}\left(\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^A = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((e^{\lambda_2}-e^{\lambda_1})A + (\lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2})I\Big)}$$

توجه: اگر در روابط بالا λ_1 و λ_2 تکراری باشند، می‌توان با میل دادن $\lambda_1 \to \lambda_2$ پاسخ را بدست آورد.