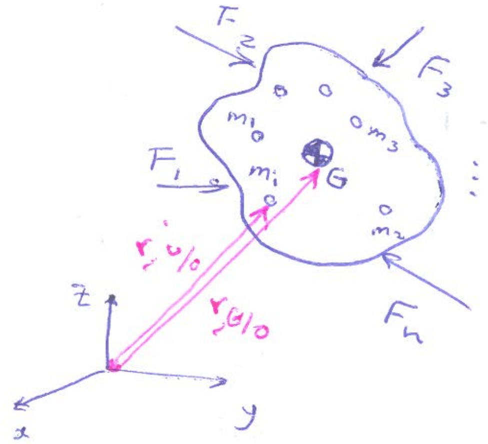
سینتیک اجسام صلب (Kinetics of Rigid Bodies)

- زمانی که صحبت از جسم صلب می‌شود، منظور جمعی از ذرات هستند که با ذرات مجاور در تماس بوده و فاصله بین هر جفت ذره در حین حرکت ثابت می‌ماند. لذا داریم:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$m\,\underset{\sim}{r}_{G/o} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\underset{\sim}{r}_{i/o}$$

$$m\,\underset{\sim}{v}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\underset{\sim}{v}_i$$



$$\sum \underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a}_G$$

برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب — جرم کل — شتاب مرکز جرم

⟹ بنابراین اولین مفهوم جهت مطالعه حرکت جسم صلب از نظر سینتیکی، مرکز جرم جسم «G» و جرم کل آن باید معلوم باشد.

- تمرکز ما در درس اصلی بر روی حرکت در صفحه (≡ حرکت دوبعدی انتقالی در صفحه xy و دوران حول محور z) است که در آن، نیروهای وارد بر جسم، موازی صفحه حرکت جسم صلب می‌باشند. (Plannar Motion)

* اصل مومنتوم خطی (Linear Momentum Principle)، $\boxed{\sum \underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a}_G = \dot{\underset{\sim}{P}}_G}$

همانطور که در بخش سینتیک ذرات اشاره شد، برآیند نیروهای خارجی وارد بر یک جسم (در اینجا صلب) برابر با نرخ تغییرات زمانی مومنتوم خطی مرکز جرم آن است.

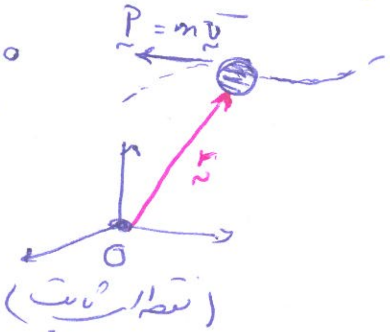
- اما برخلاف ~~ذره~~ حرکت یک ذره (که فقط انتقالی است)، اجسام صلب را می‌بایست از منظر حرکت دورانی نیز بررسی نمود:

* اصل مومنتوم زاویه‌ای (Angular Momentum / Moment of Momentum Principle)

یادآوری:

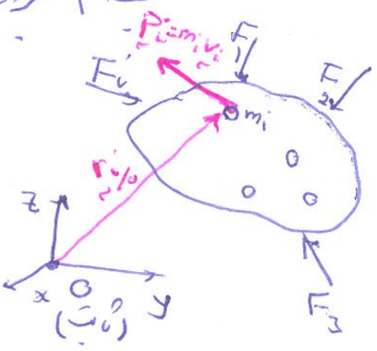
الف) برای یک ذره:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{F} = \dot{\underset{\sim}{P}} \\ \underset{\sim}{H}^{o} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{P} \end{cases} \Rightarrow \sum \underset{\sim}{M}^{o} = \dot{\underset{\sim}{H}}^{o}$$



ب) برای سیستمی از ذرات:

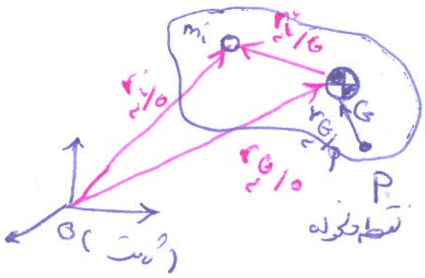
$$\underset{\sim}{H}^{o} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underset{\sim}{r}_{i/o} \times m_i \underset{\sim}{v}_i \right) \equiv$$ مومنتوم زاویه‌ای مطلق حول نقطه ثابت o



$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\underset{\sim}{H}}_{o} = \sum \left(\dot{\underset{\sim}{r}}_{i/o} \times m_i \underset{\sim}{v}_i \right) + \sum \left(\underset{\sim}{r}_{i/o} \times m_i \dot{\underset{\sim}{v}}_i \right) \quad \left(\dot{\underset{\sim}{r}}_{i/o} = \underset{\sim}{v}_i \right) \\ \text{گشتاور نیروهای خارجی حول نقطه ثابت o} \equiv \sum M^{o} = \sum \left(\underset{\sim}{r}_{i/o} \times \underset{\sim}{F}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{r}_{i/o} \times m_i \underset{\sim}{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{r}_{i/o} \times m_i \dot{\underset{\sim}{v}}_i \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{\sum \underset{\sim}{M}^{o} = \dot{\underset{\sim}{H}}^{o}}$$ (حول نقطه ثابت o)

- حال اصل مومنتم زاویه ای را برای مرکز جرم جسم (سیستم ذرات جسم) بررسی می کنیم:



$$\underset{\sim}{H}_G = \sum \underset{\sim}{r}_{i/G} \times (m_i \dot{r}_{i/O})$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{H}_G = \sum \dot{r}_{i/G} \times m_i \dot{r}_{i/O} + \sum \underset{\sim}{r}_{i/O} \times m_i \ddot{r}_{i/O} \\ \underset{\sim}{r}_{i/O} = \underset{\sim}{r}_{G/O} + \underset{\sim}{r}_{i/G} \Longrightarrow \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/O} = \dot{\underset{\sim}{r}}_{G/O} + \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/G} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \dot{\underset{\sim}{H}}_G = \sum \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/G} \times m_i \left(\dot{\underset{\sim}{r}}_{G/O} + \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/G} \right) + \sum \underset{\sim}{r}_{i/G} \times m_i \ddot{r}_{i/O}$$

$$\Longrightarrow \dot{\underset{\sim}{H}}_G = \underbrace{\sum \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/G} \times m_i \dot{r}_{G/O}}_{\equiv} + \sum \dot{r}_{i/G} \times m_i \dot{r}_{i/G} + \underbrace{\sum \underset{\sim}{r}_{i/G} \times m_i \ddot{r}_{i/O}}_{\equiv \sum \underset{\sim}{M}_G}$$

$$- \sum \dot{r}_{G/O} \times m_i \dot{r}_{i/G} = - r_{G/O} \times \frac{d}{dt} \left(\sum m_i r_{i/G} \right) \equiv 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum \underset{\sim}{M}_G = \dot{\underset{\sim}{H}}_G} \quad ★$$

توجه: $m r_{G/O} = \sum m_i r_{i/O}$

$\sum m_i \underset{\sim}{r}_{i/G} = m \underset{\sim}{r}_{G/G} = \underset{\sim}{0}$

در روابط بالا اگر به جای m_i ها از dm و به جای $\sum$ از تعریف مومنتوم
ولی از $\int$ استفاده کنیم، روابط بدست آمده (مشاهده می شود که) برای اجسام صلب نیز
(علاوه بر سیستم ذرات) برقرار است.

اگر طرفین رابطه ★ را $\sum (r_{G/P}) F$ جمع کنیم داریم

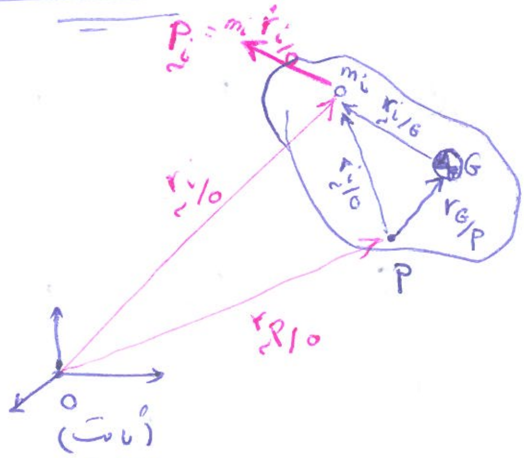
گشتاور حول P دلخواه

$$\Longrightarrow \sum M_G = \dot{H}_G \Longrightarrow \sum M_G + \underset{\sim}{r}_{G/P} \sum \underset{\sim}{F} = \dot{H}_G + \underset{\sim}{r}_{G/P} \times \overbrace{\sum \underset{\sim}{F}}^{m_{کل} \vec{a}_G}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum \underset{\sim}{M}_P = \dot{H}_G + \underset{\sim}{r}_{G/P} \times m \underset{\sim}{a}_G} \quad ★★$$

رابطه ★★ برای گشتاورگیری حول نقطه دلخواه P است. $\underset{\sim}{a}_G$ معلوم

اصل مومنتوم زاویه‌ای حول نقطه اختیاری P از سیستم:



$$\left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{H}_P = \sum_{i=1}^{n} \left(\underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/O} \right) = \text{(مومنتوم زاویه‌ای مطلق حول نقطه دلخواه P)} \\ \underset{\sim}{r}_{i/P} = \underset{\sim}{r}_{G/P} + \underset{\sim}{r}_{i/G} \end{array}\right.$$

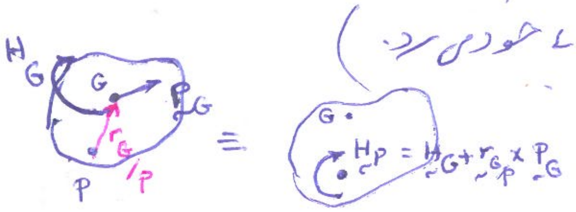
$$\Rightarrow \underset{\sim}{H}_P = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\underset{\sim}{r}_{G/P} \times m_i \underset{\sim}{v}_i \right)}_{\underset{\sim}{r}_{G/P} \times \underbrace{\sum m_i \underset{\sim}{v}_i}_{m \underset{\sim}{v}_G}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\underset{\sim}{r}_{i/G} \times \overbrace{m_i \underset{\sim}{v}_i}^{\underset{\sim}{P}_i \text{ (مطلق)}} \right)}_{= \underset{\sim}{H}_G}$$

$r_{G/P}$ چون برای همه یکسان است می‌تواند از Σ خارج شود.

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{H}_P = \underset{\sim}{H}_G + \underset{\sim}{r}_{G/P} \times \overbrace{m \underset{\sim}{v}_G}^{\underset{\sim}{P}_G}}$$ مومنتوم زاویه‌ای مطلق حول نقطه دلخواه P

به عبارتی اگر به مومنتوم زاویه‌ای سیستم گشتاور و به مومنتوم خطی نیرو نگاه کنیم:

مومنتوم زاویه‌ای مطلق سیستم حول نقطه دلخواه P، عبارت است از مومنتوم زاویه‌ای سیستم حول مرکز جرم ($\underset{\sim}{H}_G$) به علاوه گشتاور مومنتوم خطی مرکز جرم حول آن نقطه دلخواه P (≡ مشابه این ما را ~~[illegible]~~ که نیرو را از نقطه A به B ببرد ~~[illegible]~~ گشتاورش را نیز با خودش ببرد)



حال $\frac{d}{dt}$ ممنتوم زاویه‌ای مطلق حول P را محاسبه می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\underset{\sim}{H}}_P = \dot{\underset{\sim}{H}}_G + \dot{r}_{G/P} \times m\underset{\sim}{v}_G + \underset{\sim}{r}_{G/P} \times m\dot{\underset{\sim}{v}}_G \\ \\ \sum \underset{\sim}{M}_P = \sum \underset{\sim}{M}_G + \underset{\sim}{r}_{G/P} \times \sum \underset{\sim}{F} \quad \left(= \dot{\underset{\sim}{H}}_G + \underset{\sim}{r}_{G/P} \times m\underset{\sim}{a}_G\right)\end{array}\right. \quad \oplus$$

همچنین

می‌خواهم نشان دهم که جمع دو رابطه بالا منجر به رابطه $\sum \underset{\sim}{M}_P = \underbrace{(\dot{H}_P)_{rel}}_{\text{نسبی (نه مطلق)!}} + r_{G/P} \times m\underset{\sim}{a}_P$ می‌شود:

سرعت نسبی هر ذره نسبت به نقطه P

تعریف: $(\underset{\sim}{H}_P)_{rel} = \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \dot{r}_{i/P}$

بردار مکان هر ذره نسبت به نقطه P

$\underset{\sim}{P}_{rel}$

$$\Rightarrow (\dot{\underset{\sim}{H}}_P)_{rel} = \sum \cancel{\dot{\underset{\sim}{r}}_{i/P} \times m_i \dot{r}_{i/P}}^{\,0} + \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \ddot{r}_{i/P}$$

$$= \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \left(\ddot{\underset{\sim}{r}}_{i/O} - \ddot{\underset{\sim}{r}}_{P/O}\right) =$$

$$\underbrace{\sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_{i/O}}_{\sum \underset{\sim}{M}_P} - \underbrace{\sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_{P/O}}$$

$$= +\underset{\sim}{a}_P \times \sum \underset{\sim}{m_i} \underset{\sim}{r}_{i/P}$$

$$= \underset{\sim}{a}_P \times m\underset{\sim}{r}_{G/P}$$

$$= -r_{G/P} \times m\underset{\sim}{a}_P$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum \underset{\sim}{M}_P = (\dot{\underset{\sim}{H}}_P)_{rel} + \underset{\sim}{r}_{G/P} \times m\, \underset{\sim}{a}_P}$$ (***)

جایی که نقطه P دلخواه معلوم باشد می‌توان استفاده نمود نیز سیستم را بیان کرد

حالت های خاص:

۱) اگر P نقطه‌ای ثابت باشد یا با سرعت ثابت حرکت کند ($\underset{\sim}{a}_P = \underset{\sim}{0}$) در رابطه اول (+) جمله $\underset{\sim}{0} = \dot{\underset{\sim}{r}}_{G/P} \times m \underset{\sim}{v}_G$ شده و رابطه

$$\boxed{\sum \underset{\sim}{M}_P = (\dot{H}_P)_{\text{مطلق}} \equiv (\dot{H}_P)_{rel}}$$ (+)(+)(+) $\Longrightarrow$ اگر P نقطه ثابتی باشد

$$\boxed{\sum \underset{\sim}{M}_P = (\dot{H}_P)_{rel} \neq (\dot{H}_P)_{\text{مطلق}}}$$ اگر P با سرعت ثابت حرکت کند

۲) اگر P مرکز جرم باشد از رابطه (**) یا (***) خواهیم داشت:

$$\boxed{\sum M_G = \dot{\underset{\sim}{H}}_G \equiv (\dot{H}_G)_{rel}}$$

۳) P نقطه‌ای باشد که شتاب آن به سمت مرکز جرم است ($\underset{\sim}{r}_{G/P} \parallel \underset{\sim}{a}_P$)

$$\Longrightarrow \boxed{\sum \underset{\sim}{M}_P = (\dot{\underset{\sim}{H}}_P)_{rel}}$$

* روابط ارائه شده بالا هم برای سیستم ذرات (هم صلب و هم غیر صلب) و هم برای اجسام صلب (با تبدیل Σ به $\int$ و نوشتن dm به جای m_i ها) برقرار است

میراثر بار!

تفاوت $(\underset{\sim}{H}_p)_{\text{مطلق}}$ و $(H_p)_{rel}$ و شرایط برابر بودن آن‌ها:

طبق تعریف:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{H}_P = \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times \overbrace{m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/O}}^{P_{\text{مطلق}}} \\ (\underset{\sim}{H}_P)_{rel} = \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times \underbrace{m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/P}}_{P_{rel}} \end{cases}$$

$$(\underset{\sim}{H}_P)_{rel} = \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \left(\dot{\underset{\sim}{r}}_{i/O} - \dot{\underset{\sim}{r}}_{P/O} \right) = \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_{i/O} - \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_{P/O}$$

$$\Longrightarrow (H_P)_{rel} = (\underset{\sim}{H}_P)_{\text{مطلق}} - \sum \underset{\sim}{r}_{i/P} \times m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_{P/O} \Longrightarrow$$

$$(H_P)_{rel} = \underset{\sim}{H}_{P_{\text{مطلق}}} + \dot{r}_{P/O} \times \sum m_i \underset{\sim}{r}_{i/P} = \underset{\sim}{H}_P + \dot{r}_{P/O} \times (m_{\text{کل}} \underset{\sim}{r}_{G/P})$$

$$\Longrightarrow \boxed{(H_P)_{rel} = (H_P)_{\text{مطلق}} - r_{G/P} \times m \dot{r}_{P/O}}$$

→ رابطه بین $\underset{\sim}{H}_P$ مطلق و $\underset{\sim}{H}_P$ نسبی

حال اگر حاصل $\dot{r}_{P/O}$، $r_{G/P}$ و یا $r_{G/P} \times \dot{r}_{P/O}$ صفر گردد، مومنتوم زاویه‌ای مطلق و نسبی یکسان می‌شوند.

به عبارت دیگر:
1) P همان مرکز جرم باشد.
2) یا سرعت مطلق P صفر باشد ← P نقطه ثابت باشد،
3) یا سرعت مطلق P به سمت مرکز جرم باشد (ملاحظه در ادامه)

مومنتوم زاویه‌ای مطلق و نسبی یکسان خواهد شد.

توجه : در حالت های 1 و 2 ، علاوه بر اینکه $(H_p)_{rel} = (H_p)_{\text{مطلق}}$ برقرارند،

نسبی

$\sum M_p = (\dot{H}_p)_{rel} = (\dot{H}_p)_{\text{مطلق}}$ برقرار است؛ اگرچه در حالت شماره 3 ، فقط $(H_p)_{rel} = (H_p)_{\text{مطلق}}$

بوده اما بین شرط‌های سه‌گانه قابل وقوع در ★★★ ، لزوماً

$\sum M_p \neq \dot{H}_{p\,rel}$ (لزوماً تساوی $\sum M_p$ و $\dot{H}_p$ برقرار نیست) !

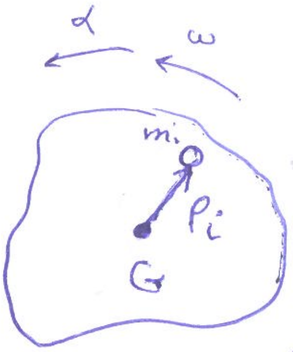
- و اما سؤال: چگونه می‌توان H_G را به سرعت زاویه‌ای $\underset{\sim}{\omega}$ ارتباط داد؟

* از این به بعد **فقط** اجسام صلب را بررسی خواهیم نمود.

- نکته 2: برای حرکت جسم صلب در صفحه، $\underset{\sim}{\omega}$ و $\underset{\sim}{\alpha}$ عمود بر صفحه حرکت می‌باشند. (به عبارتی اگر محور عمود بر حرکت را z بنامیم، $\underset{\sim}{\omega} = \omega\hat{k}$ ، $\underset{\sim}{\dot\omega} = \alpha\hat{k} = \underset{\sim}{\alpha}$ خواهند بود)

در این صورت با توجه به ثابت بودن جهت سرعت و شتاب زاویه‌ای، فقط از اندازه ω و α به عنوان کمیت‌های اسکالر بهره خواهیم برد.)

- پیش‌تر دیدیم که $\underset{\text{مطلق}}{(H_G)} = (H_G)_{rel}$ برقرار است:



$$H_G = \sum \rho_i \times m\dot{\rho}_i \left(= \sum \underset{\sim}{r}_{i/G} \times m \underset{\sim}{\dot r}_{i/G}\right)$$

موقعیت نسبی توزیع اجرام نسبت به مرکز جرم

سرعت نسبی اجزای جسم صلب نسبت به مرکز جرم

$\boxed{\text{در جسم صلب داریم:}\quad \underset{\sim}{\dot\rho}_i = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\rho}_i}$ ($\equiv$ سرعت مطلق هر نقطه در جسم صلب

از جمع برداری سرعت مرکز جرم و $\omega\times\rho_i$ نسبت به مرکز جرم بدست می‌آید؛ بنابراین سرعت نسبی هر جزء نسبت به مرکز جرم ($\equiv \underset{\sim}{\dot\rho}_i$) را برابر $\underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{\rho}_i$ می‌باشد؛ یک اثبات دیگر این است که **بردار** $\underset{\sim}{\rho}_i$ دارای اندازه ثابت $|\underset{\sim}{\rho}_i|$ بوده که با سرعت زاویه‌ای مطلق $\underset{\sim}{\omega}$ در حال چرخش است؛ بنابراین $\underset{\sim}{\dot\rho}_i = \underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{\rho}_i$)

حال عبارت H_G را ساده‌سازی می‌کنیم:

$$(H_G)_{\text{مطلق}} = (H_G)_{\text{نسبی}} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times m_i (\omega \times \rho_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \underbrace{\rho_i \times (\omega \times \rho_i)} = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega \rho_i^2 \hat{k}$$

که برداری است با اندازه $\omega \rho_i^2$ در جهت $\hat{k}$

$$\Longrightarrow (H_G)_{\text{مطلق یا نسبی}} = \omega \underbrace{\left(\sum m_i \rho_i^2\right)} \hat{k} = I_G \omega \hat{k}$$

ω: اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای

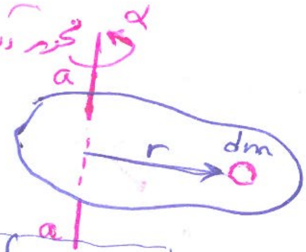
I_G: توزیع اجرام حول مرکز جرم در جسم صلب

$$\Longrightarrow \boxed{\text{تعریف می‌کنیم}: \quad I_G = \sum m_i \rho_i^2 \ \text{یا} \int \rho^2 dm}$$

ممان اینرسی جرمی (Mass Moment of Inertia)

I، ویژگی مهم از یک جسم است که چگونگی توزیع جرم را در آن (حول محوری خاص) بیان می‌کند و در تحلیل‌های سینتیکی برای هر جسم صلبی که دارای شتاب زاویه‌ای حول یک محور باشد، وارد می‌شود.

- همانطور که جرم (m) یک جسم، معیاری از مقاومت آن در برابر شتاب انتقالی است، ممان اینرسی نیز معیاری از مقاومت در مقابل شتاب زاویه‌ای است.



$I \rightarrow$ (نحوه توزیع جرم) $\rightarrow$ تابعی از هندسه

و جرم اجزاء (جِکّالی ...) تشکیل دهنده

$$\boxed{I_{aa} = \int r^2 dm}$$

* برخلاف m که به عنوان اسکالر از هر سمتی به جسم نگاه کنیم، عددی ثابتی است، I نسبت به تغییر محور مورد بررسی، آن نیز عوض می‌کند (= به بیان دقیق‌تر، ماهیت فیزیکی آن از جنس تانسوری است.)

- به ممان اینرسی جرمی نسبت به مرکز جرم، ممان اینرسی مرکزی یا

$I_G = I_{zz_G}$ نیز گفته می‌شود. Central Mass Moment of Inertia

حرکت صفحه‌ای $\Longrightarrow$ $H_G \hat{k} = (I_G \omega)\hat{k}$

$$\Longrightarrow \sum (M_G)\hat{k} = (\dot{H}_G)\hat{k} = (I_G \alpha)\hat{k}$$

بنابراین:

- معادلات عمومی برای حرکت جسم صلب در صفحه (General Rigid Body Planar Motion)

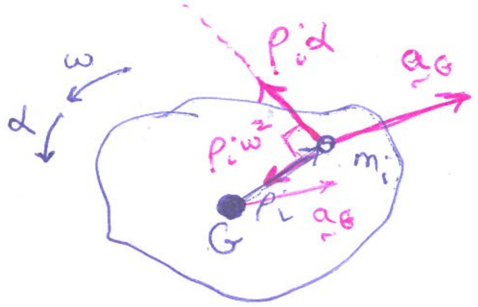
$$\sum \underset{\sim}{F} = m\, \underset{\sim}{a}_G$$

عبارت است از: (شتاب در دو بعد که می‌تواند در دستگاه کارتزین x-y، دستگاه مختصات عمودی n-t یا قطبی r-θ باشد)

$$\sum \underset{\sim}{M}_G = \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{H}_G) = \frac{d}{dt}(I_{G_{\hat{z}}}\,\omega)\hat{k} = I_{G_{\hat{z}}}\,\alpha$$

- توجه داشته باشید که هر ذره جرمی در جسم صلب دارای شتابی مطلق است که

از جمع سه بردار حاصل می‌شود:



1) شتاب مرکز جرم

2) شتابی به سمت مرکز جرم به اندازه $\rho_i\omega^2$

3) شتابی عمود بر بردار ρ_i به اندازه $\rho_i\alpha$

- لختی دورانی حول محور z گذرنده از نقاط دیگر (به جز مرکز جرم):

در بحث قبل با تعریف $(H_G)_{rel}=\sum \rho_i \times m_i\dot{\rho}_i$ ، نشان دادیم که

$\boxed{(\dot{H}_G)_{rel}=I_G\alpha}$ می‌باشد.

مشابهاً می‌توانیم از تعریف مومنتوم زاویه‌ای نسبی برای

یک نقطه P از جسم صلب $\underbrace{(\equiv \text{نقطه‌ای ثابت نسبت به جسم})}$ نیز لختی دورانی

شرط ضروری (!)

حول آن نقطه دلخواه P را محاسبه کنیم:

$$(H_p)_{rel}=\sum_{i=1}^{n}\left(r_{i/p}\times m_i\underbrace{\dot{r}_{i/p}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(r_{i/p}\times m_i\left(\underset{\sim}{\omega}\times \underset{\sim}{r}_{i/p}\right)\right)$$

در جسم صلب داریم: $\dot{r}_{i/p}=\underset{\sim}{\omega}\times \underset{\sim}{r}_{i/p}$ (چرا؟)

$$\Longrightarrow (H_p)_{rel}=\sum_{i=1}^{n} m_i \underbrace{\underset{\sim}{r}_{i/p}\times(\underset{\sim}{\omega}\times \underset{\sim}{r}_{i/p})}=\sum m_i\,\omega\,|r_{i/p}|^2\,\hat{k}$$

در حرکت صفحه‌ای بردار است به اندازه $|r_{i/p}|^2\omega$ در جهت $\hat{k}$

$$\Longrightarrow (H_P)_{rel} = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i \left|r_{i/P}\right|^2 \hat{k} = (I_P\,\omega)\,\hat{k}$$

با تعریف : $\boxed{I_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \left|r_{i/P}\right|^2}$ یا $\int \left|r_{i/P}\right|^2 dm$

خواهیم داشت :

$$(H_P)_{rel} = I_P\,\omega$$

یا

$$\boxed{(\dot{H}_P)_{rel} = I_P\,\alpha}$$

سؤال : I_P چگونه برحسب I_G محاسبه می‌شود؟ پاسخ در ادامه و در قضیه انتقال محورها بیان می‌شود

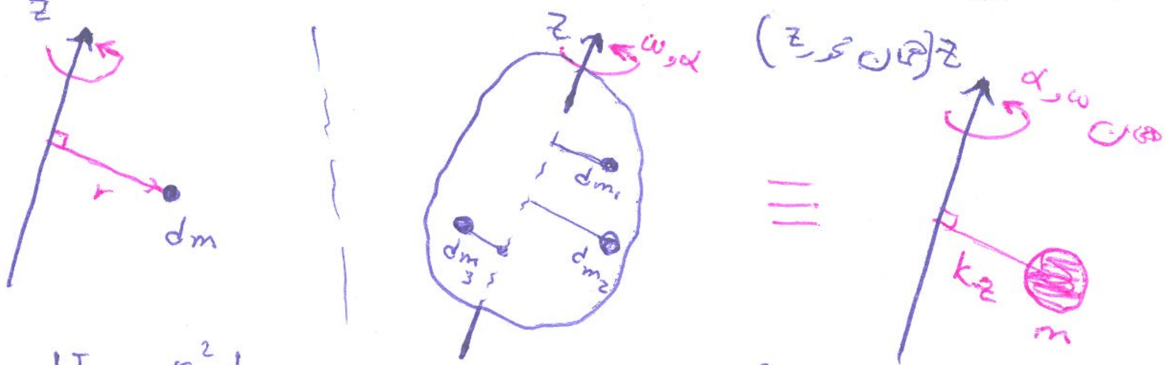
به عبارت نسبی در این رابطه دقت کنید! قرار نیست که $\sum M_P$ حول هر P دلخواه برابر با حاصلضرب I_P حول آن نقطه در شتاب زاویه‌ای جسم صلب باشد!

شعاع ژیراسیون (Radius of Gyration)

اسم: شعاع دوران

- گاهی اوقات ممان اینرسی یک جسم حول یک محور مشخص توسط شعاع ژیراسیون k بیان می‌شود که واحد طول را داراست و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$I = m k^2 \quad \text{یا} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \qquad \left(\text{مثلاً } k_z = \sqrt{\frac{I_{zz}}{m}} \right)$$

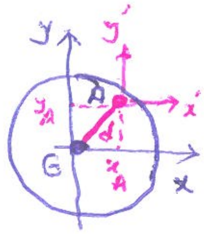


$$dI_z = r^2\, dm$$

$$I_{zz} = \sum r_i^2\, dm_i = \int r^2\, dm \equiv m k_z^2$$

(به عبارتی شعاع ژیراسیون k بیانگر فاصله‌ای است که کل جرم جسم باید در آن فاصله نسبت به محور مذکور متمرکز شده تا ممان اینرسی آن نسبت به آن محور مورد نظر تغییر نکند.)

- قضیه انتقال محورها (Parallel Axis Theorem): هنگامی که حول مرکز جرم، ممان اینرسی مرکز جرم حول یک محور (I_G) معلوم باشد، ممان اینرسی جسم حول هر محور موازی با آن محور نیز قابل محاسبه است:

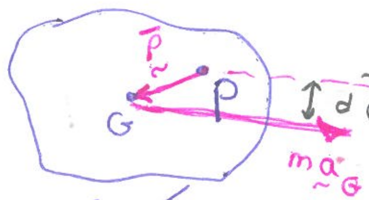


$$\boxed{(I_{\hat z})_A = (I_{\hat z})_G + m\left(x_A^2 + y_A^2\right) = (I_z)_G + m d^2}$$

- بدین ترتیب مشاهده می‌شود که ممان اینرسی جسم صلب، حول نقطه دلخواه P، از رابطه روبرو محاسبه می‌شود:

$$I_P = (I_G + m\bar{\rho}^2)$$

(اندازه $\bar{\rho}$ | بردار واصل نقطه مورد نظر P به مرکز جرم G)



d (اندازه تصویر $\bar{\rho}$ بر امتداد عمود بر جهت شتاب) ⊕

حال می‌خواهیم با توجه به روابط استخراج شده گذشته، برای برآیند گشتاورهای نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب حول نقطه دلخواه P روابط تشکیل شده را بازنویسی کنیم:

(P واقع بر جسم صلب (= نقطه ثابت نسبت به جسم))

الف) زمانی که شتاب مرکز جرم مشخص باشد:

داریم: $\sum \underline{M}_P = \dot{\underline{H}}_G + \bar{\rho} \times m\underline{a}_G$

$$\Rightarrow \quad 1* \quad \boxed{(\sum M_P)\hat{k} = (I_G\alpha)\hat{k} + (m a_G d)\hat{k}}$$

در حرکت صفحه‌ای، هر سه ترم در راستای $\hat{k}$ بوده و به‌سادگی می‌توان با آن‌ها به صورت اسکالر رفتار کرد.

ب) شتاب نقطه دلخواه P معلوم باشد:

داشتیم: $\sum M_P = (\dot{H}_P)_{rel} + \bar{\rho} \times m a_P$

نشان دادیم $(I_P\alpha)\hat{k}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\sum M_P)\hat{k} = (I_P\alpha)\hat{k} + \underbrace{\bar{\rho} \times m a_P}_{}} \quad (2*)$$

که برداری در راستای $\hat{k}$

ـ نتایجی که از (2*) می‌توان نتیجه گرفت:

(I) ـ اگر P=G باشد ($\bar{\rho} = 0 \equiv$) ، آنگاه: $\sum M_G^{\hat{k}} = (I_G\alpha)\hat{k}$

(II) اگر $a_P = 0$ و البته P (از آنجا) یک نقطه از جسم صلب باشد:

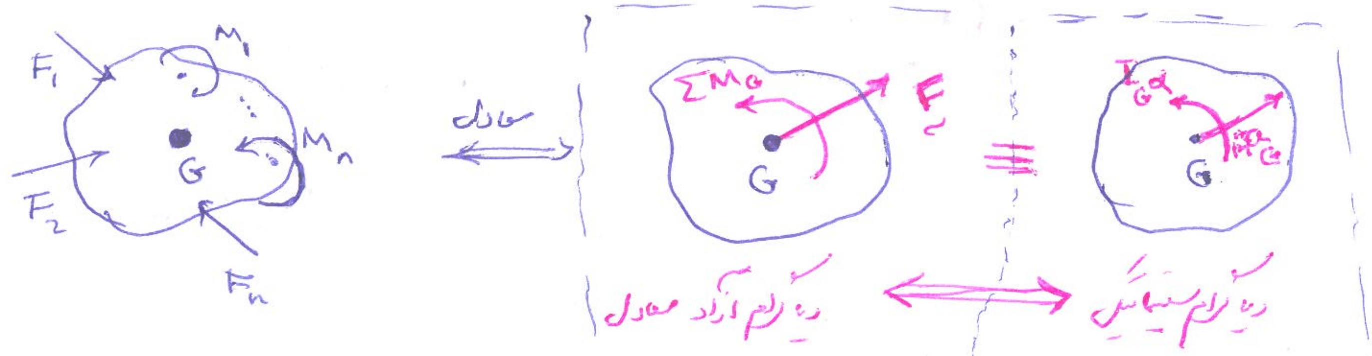
$(P=O) \Leftarrow \sum M_O = I_O\alpha$ نقطه O

← معادله حرکت زاویه ای یک جسم صلب حول یک نقطه ثابت (نسبت به مرجع لخت)

و جزئی از جسم صلب (ثابت نسبت به جسم) در حرکت صفحه ای

(III) اگر P نقطه‌ای روی جسم صلب باشد و شتاب مطلق آن به سمت مرکز جرم باشد، باز هم فرم ساده شده $(\sum M_P)\hat{k} = \underset{\dot{H}_{rel}}{(I_P\alpha)}\hat{k}$ برقرار است.

- از استاتیک به یاد داریم که اثر سیستمی از نیروها و ممان های خارجی وارد بر یک جسم صلب را می‌توان توسط یک نیرو و یک گشتاور (کوپل) برآیند در هر نقطه‌ای از جسم بیان نمود. طبیعتاً نقطه مرکز جرم (G) یکی از مناسب‌ترین نقطه‌ها برای معادل کردن سیستم نیرویی است.



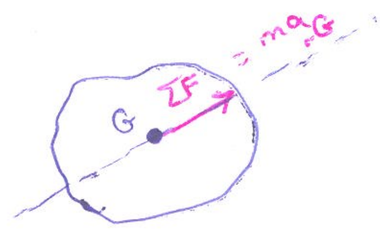
کلی‌ترین حالت حرکت صفحه‌ای ⟵
$$\begin{cases} \sum \underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}_G \\ \sum M_G \hat{k} = (I_G \alpha)\hat{k} \end{cases}$$

- اکنون دو وضعیت خاص از حرکت جسم صلب در صفحه را بررسی می‌کنیم:

الف) حرکت انتقالی خالص جسم صلب (Pure Translational Motion of R.B.)

No Rotation $\Longrightarrow$ $\underset{\sim}{\omega} = 0$ و $\underset{\sim}{\alpha} = 0$

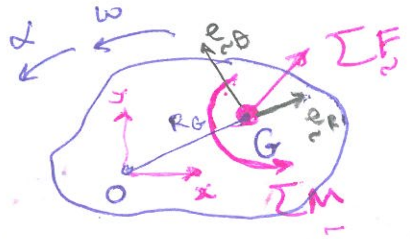
$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum \underset{\sim}{F}_{\hat{x}} = m(\underset{\sim}{a}_G)_{\hat{x}} \\ \sum \underset{\sim}{F}_{\hat{y}} = m(\underset{\sim}{a}_G)_{\hat{y}} \\ \sum M_{G\hat{z}} = 0 \end{cases}$$



در حرکت های انتقالی خالص برآیند گشتاورها (کوپل) را حول مرکز جرم محاسبه کنید که باید صفر باشد.

ب) حرکت دورانی خالص جسم صلب (Pure Rotational Motion of R.B.)

برای جسمی که دارای حرکت دورانی خالص است، محوری ثابت و عمود بر صفحه دوران خواهیم داشت. در این حالت مرکز جرم (و البته هر نقطه دیگری از جسم)، دارای مسیر دایره‌ای به شعاع ثابت R (متناسب با فاصله از محور دوران) می‌باشد.



$R_G = R = cte \qquad \dot{\theta} = \omega,\ \ddot{\theta} = \alpha$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\,\underset{\sim}{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow a_G = -R_G\omega^2\,\hat{e}_R + R_G\dot{\omega}\,\hat{e}_\theta$$

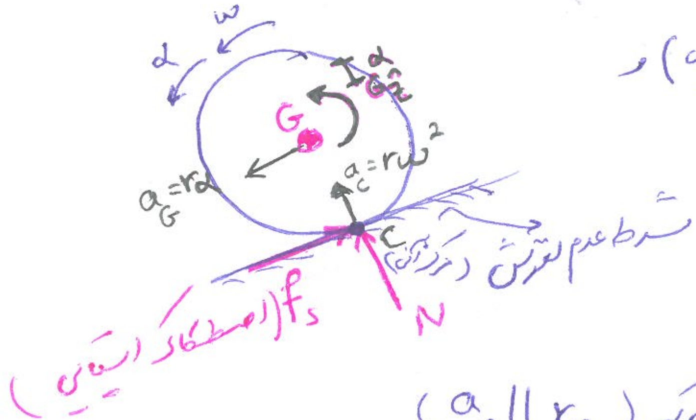
$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma \underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a}_G \\ \Sigma M_{O\hat{z}} = I_{O\hat{z}}\,\alpha \end{cases}$$

نقطه ثابت و چرخشی از جسم

سود

- محاسبه گشتاور حول نقطه ثابت O سبب می‌شود که گشتاور نیروهای (اتصالی) گذرنده از O (مثلاً ناشی از نیروهای تکیه‌گاه مفصلی) در معادلات ظاهر نشود.

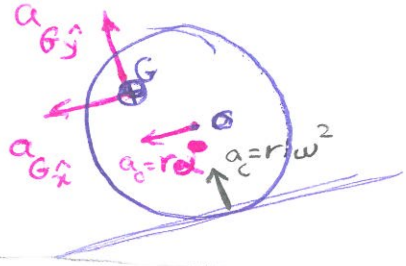
پ) حرکت کلی در صفحه (General Motion): هنگامی که جسم صلب دارای حرکت کلی است، نقطه‌ای با سرعت صفر (به صورت ثابت) در جسم وجود ندارد. در حالت کلی مرکز جرم متداول‌ترین نقطه برای نوشتن معادلات $\sum M_G = \dots$ است. با این حال، گاهی اوقات در سیستم نقطه‌ای موجود است که شتاب آن به سمت مرکز جرم است (شرط سوم جهت برقراری رابطه $\sum M_A = \dot{H}_{A_{rel}} = I_A \alpha$). در این موارد، این نقطه نیز می‌تواند یک کاندیدای مناسب جهت جمع کردن گشتاورهای نیروهای خارجی باشد.



مثال ۱: اگر مرکز هندسی جسم (= مرکز دایره) و مرکز جرم (G) برهم منطبق باشند، با شرط عدم لغزش، این نقطه برای جمع کردن گشتاورها مناسب خواهد بود. به طوری که ($a_C \parallel r_{G/C}$)

$$\Rightarrow \sum M_{C_z}\hat{k} = (I_{C_z}\alpha)\hat{k}$$

۲) در حالتی که مرکز هندسی و مرکز جرم برهم منطبق نباشند (Unbalanced wheel)



$$a_G = a_o + \omega \times (\omega \times r_{G/O}) + \alpha \times r_{G/O}$$

$$= R\alpha\hat{i} + (-\alpha\hat{k}) \times (l_1\hat{i} + l_2\hat{j}) - \omega^2(l_1\hat{i} + l_2\hat{j})$$

$$\Rightarrow a_G = (\underbrace{R\alpha + l_2\alpha - l_1\omega^2}_{a_{Gx}})\hat{i} + (\underbrace{-l_1\alpha - l_2\omega^2}_{a_{Gy}})\hat{j}$$

در نتیجه: $a_C = R\omega^2\hat{j}$

$\Leftarrow$ مشاهده می‌شود که شتاب نقطه C به سمت مرکز جرم نیست، پس نمی‌توان از رابطه $\sum M_C = I_C\alpha$ استفاده کرد، مگر اینکه در آن لحظه، C، O و G در یک خط راست قرار بگیرند.

اصل کار و انرژی (Principle of Work & Energy) (برای حرکت جسم صلب در صفحه)

یادآوری : اصل کار و انرژی را برای سیستم از ذرات به صورت زیر بیان کردیم :

$$\boxed{T_1 + V_1 + {}_1U_2^{N.C.} = T_2 + V_2}$$

که در آن:

T : انرژی جنبشی کل سیستم $= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$

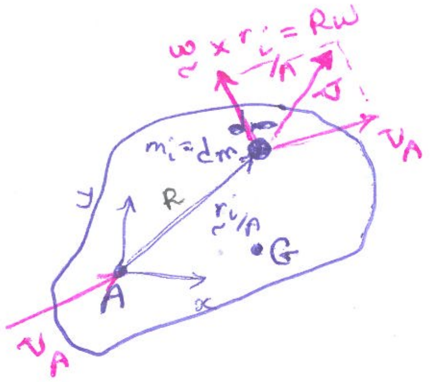
V : انرژی پتانسیل کل $= \sum_{i=1}^{N} V_i$

${}_1U_2^{N.C.}$: کل کار نیروهای ناپایستار در جابجایی از نقطه 1 به 2

— بدین ترتیب برای تعمیم چنین روابطی به اجسام صلب، بایستی که انرژی جنبشی و کار را برای این اجسام تعریف و ارزیابی

تعمیم : بررسی جسم صلب با حرکت کلی (دوران و انتقال) در صفحه

- انرژی جنبشی (Kinetic Energy)



با داشتن سرعت یک نقطه دلخواه A و سرعت زاویه‌ای ω یک جسم صلب، انرژی جنبشی آن را محاسبه کنید.

حل : مطابق شکل، می‌توان سرعت مطلق المان dm از جسم صلب را با داشتن v_A به صورت زیر محاسبه کرد:

$$v_i = v_A + \omega \times r_{i/A}$$

از طرفی: انرژی جنبشی

$$T = \int_{\text{در کل جسم}} \frac{1}{2} (v_i \cdot v_i)\, dm \quad \left(\equiv \int \frac{1}{2} v_i^2\, dm\right)$$

A نقطه اختیاری در جسم

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\int_m \left(\underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{i/A}\right)\cdot\left(\underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{i/A}\right) dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_m \underset{\sim}{v}_A \cdot \underset{\sim}{v}_A \, dm + \frac{1}{2}\int_m (\omega \times r_{i/A})\cdot(\omega \times r_{i/A})\, dm$$

$$+ \frac{1}{2}\int_m \left(\underset{\sim}{v}_A \cdot (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{i/A}) + (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{i/A})\cdot \underset{\sim}{v}_A \right) dm$$

$\underset{\sim}{v}_A$ و $\underset{\sim}{\omega}$ به dm بستگی ندارند

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} v_A^2 \underbrace{\int dm}_{m} + v_A \cdot \left(\underset{\sim}{\omega} \times \underbrace{\int_m r_{i/A}\, dm}_{\sum_{i=1}^{n} m_i \underset{\sim}{r}_{i/A} = m \underset{\sim}{r}_{G/A}}\right) + \frac{1}{2}\int_m \underbrace{|\omega \times r_{i/A}|^2}_{R\omega} dm$$

$$\int_m (R\omega)^2 dm = \omega^2 \underbrace{\int_m R^2 dm}_{I_{\hat{z}_A}} = I_{A\hat{z}}\,\omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m v_A^2 + m \underset{\sim}{v}_A \cdot (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{G/A}) + \frac{1}{2} I_{\hat{z}_A}\, \omega^2}$$

حالت خاص بسیار پرکاربرد

$$\xrightarrow{A = G} \quad \xrightarrow{\underset{\sim}{r}_{G/A} = \underset{\sim}{0}} \quad \boxed{T = \underbrace{\frac{1}{2} m v_G^2}_{\text{انرژی جنبشی ناشی از انتقال}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{G\hat{z}}\, \omega^2}_{\text{انرژی جنبشی دورانی}}}$$

حالت های خاص:

1) حرکت انتقالی خالص جسم صلب $(\omega = 0)$ $\Rightarrow T = \frac{1}{2} m v_G^2$

2) حرکت دورانی خالص جسم صلب $(v_G = 0)$ $\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_{G_z} \omega^2$

3) اگر A مرکز آنی دوران باشد $(v_A = 0)$ $\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_{A\hat{z}}\, \omega^2}$

کار (Work) :

$${}_1U_2 = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr_{P/O}$$

r_2 ← مکان انتهایی ذره

$dr_{P/O}$ ← تغییر مکان ذره

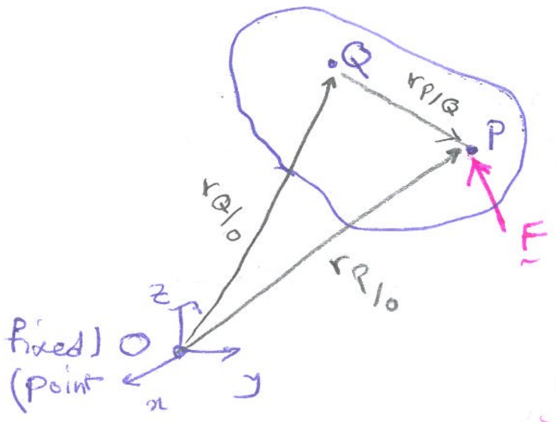
r_1 ← مکان ابتدایی ذره

یادآوری : برای یک ذره :

کار نیروی F ← $U = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\, ds$

کار گشتاور زوج M ← $U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, d\theta$

- جسم صلب اختیاری شکل زیر را در نظر بگیرید؛ نیروی F در نقطه‌ی P از جسم صلب وارد می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی F در جابجایی نقطه P نسبت به نقطه ثابت O برابر است با :



$$\boxed{{}_1U_2 = \int_{(r_{P/O})_1}^{(r_{P/O})_2} F \cdot dr_{P/O}}$$

$dr_{P/O}$ ← تغییر مکان همان نقطه‌ای که نیرو به آن وارد شده است.

که در آن $(r_{P/O})_1$ و $(r_{P/O})_2$ مکان‌های اولیه و نهایی نقطه P هستند.

- اگر مسیر حرکت نقطه P از جسم مشخص نبوده، اما مسیر نقطه‌ی دیگری مانند Q شناخته شده باشد، می‌توان کار F را برحسب جابجایی نقطه Q نیز محاسبه کرد.

(با توجه به صلب بودن جسم، بین حرکت نقاط جسم رابطه (قید) وجود دارد؛ به عبارتی با مشخص بودن بردار سرعت یک نقطه و سرعت زاویه‌ای جسم صلب، سرعت سایر نقاط قابل محاسبه است)

- هنگامی که نیروی $\underset{\sim}{F}$ به جسم صلب وارد می‌شود، تغییرمکان‌های جزئی (Infinitesimal) را به صورت $d\underset{\sim}{r}_{P/O}$ ، $d\underset{\sim}{r}_{Q/O}$ و $d\underset{\sim}{\theta}$ خواهیم داشت به گونه‌ای که :

$$d\underset{\sim}{r}_{P/O} = \text{function of } (d\underset{\sim}{r}_{Q/O} \text{ , } d\underset{\sim}{\theta}) \quad \text{و} \quad \underset{\sim}{\omega} = \frac{d\underset{\sim}{\theta}}{dt}$$

$$\underset{\sim}{v}_P = \frac{d\underset{\sim}{r}_{P/O}}{dt}$$

- تغییرمکان نقطه P ، ناشی از سرعت نقطه P در مدت زمان dt می‌باشد:

$$\Longrightarrow d\underset{\sim}{r}_{P/O} = \underset{\sim}{v}_P\, dt = (\underset{\sim}{v}_Q + \underset{\sim}{\omega} \times r_{P/Q})\, dt$$

$$\Longrightarrow d\underset{\sim}{r}_{P/O} = \underset{\sim}{v}_Q\, dt + (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{P/Q})\, dt$$

که در آن $\underset{\sim}{v}_Q = \frac{d\underset{\sim}{r}_{Q/O}}{dt}$ و $\underset{\sim}{\omega} = \frac{d\underset{\sim}{\theta}}{dt}$

$$\Longrightarrow d\underset{\sim}{r}_{P/O} = \frac{d\underset{\sim}{r}_{Q/O}}{dt}\, dt + \frac{d\underset{\sim}{\theta}}{dt} \times \underset{\sim}{r}_{P/Q}\, dt$$

$$\Longrightarrow \boxed{d\underset{\sim}{r}_{P/O} = d\underset{\sim}{r}_{Q/O} + d\underset{\sim}{\theta} \times \underset{\sim}{r}_{P/Q}}$$

- حال به جای $d\underset{\sim}{r}_{P/O}$ در فرمول کار $\underset{\sim}{F}$ ، رابطه بالا را جایگزین کنیم، داریم:

توجه: $\boxed{\underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}) \cdot \underset{\sim}{C}}$

$${}_1U_2 = \int_{(r_{Q/O})_1}^{(r_{Q/O})_2} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r}_{Q/O} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\underset{\sim}{F} \cdot (d\underset{\sim}{\theta} \times \underset{\sim}{r}_{P/Q})}$$

$$(\underset{\sim}{F} \times d\underset{\sim}{\theta}) \cdot r_{P/Q} = (- d\underset{\sim}{\theta} \times \underset{\sim}{F}) \cdot r_{P/Q}$$

$$= - d\underset{\sim}{\theta} \cdot (\underset{\sim}{F} \times r_{P/Q}) = d\underset{\sim}{\theta} \cdot (\underset{\sim}{r}_{P/Q} \times \underset{\sim}{F})$$

$$= \underset{\sim}{M}_Q \cdot d\underset{\sim}{\theta}$$

$$\boxed{{}_1U_2 = \int_{(r_{Q/O})_1}^{(r_{Q/O})_2} \tilde{F}\cdot d\tilde{r}_{Q/O} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_Q \cdot d\tilde{\theta}}$$

$$\Updownarrow$$

$${}_1U_2 = {}_1U_2\big)_{Trans.} + {}_1U_2\big)_{Rot.}$$

($d\,{}_1U_2 = \tilde{F}\cdot d\tilde{r}_{Q/O} + \tilde{M}_Q\cdot d\tilde{\theta}$: Infinitesimal Work کار جزئی)

توان $\;{}_1\dot{U}_2 = \tilde{F}\cdot \tilde{v}_Q + \tilde{M}\cdot\tilde{\omega}$

- نقطه Q می‌تواند مرکز جرم باشد. بدین ترتیب برای محاسبه کار F اعمال شده در نقطه P را می‌توان سهم F در $d\tilde{r}_{P/O}$ ضرب داخلی کرد و یا اینکه F و گشتاور آن را به نقطه دیگری (مثلاً مرکز جرم) منتقل کرد و مجموع کار F و گشتاور آن در نقطه جدید را به عنوان کار F در نقطه P لحاظ کرد.

Trans.

Rot. ← کار انجام شده توسط گشتاور F در چرخش جسم صلب

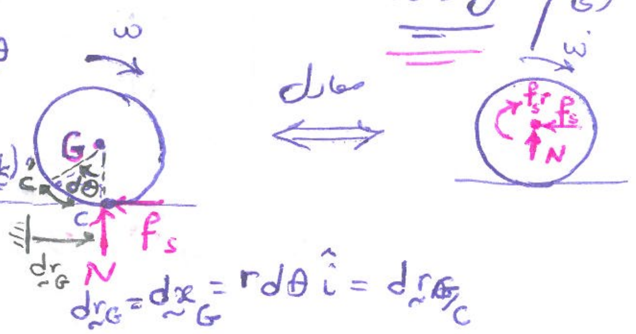
* یک قانون سرانگشتی برای محاسبه dU ناشی از F در نقطه P: عبارت سرعت مطلق P را نوشته و به جای $\dot{\theta}$ها، $\delta\theta$ و به جای $\dot{r}$ها، δr جایگزین کنید.

- غلتش بدون لغزش: در حالت غلتش بدون لغزش، نیروها در محل تماس کار انجام نمی‌دهند.

$$d\,{}_1U_2 = \tilde{F}\cdot d\tilde{r}_C \overset{\text{یا}}{=} \tilde{F}\cdot d\tilde{r}_{G/C} + \tilde{M}_G\cdot d\theta$$

$$= (-f_s\tilde{i})\cdot(r\,d\theta\,\tilde{i}) + (-f_s r\tilde{k})\cdot(-d\theta\tilde{k})$$

$$= -f_s r\,d\theta + f r\,d\theta = 0$$



$$d\tilde{r}_G = d\tilde{x}_G = r\,d\theta\,\hat{i} = d\tilde{r}_{G/C}$$

- در نهایت می‌توان قضیه کار و انرژی را برای اجسام صلب (مشابه سیستم ذرات) به شکل زیر نوشت:

انرژی جنبشی اولیه جسم صلب

کار تمامی نیروها و گشتاورهای خارجی (هم پایستار هم ناپایستار)

$$\boxed{T_1 + U_{1-2} = T_2}$$

انرژی جنبشی نهایی جسم صلب

انرژی مکانیکی ثانویه

$$\boxed{T_1 + V_1 + U^{N.C}_{1-2} = T_2 + V_2}$$

انرژی جنبشی اولیه

انرژی پتانسیل (= بجای کار نیروهای پایستار)

کار نیروها و گشتاورهای ناپایستار

انرژی جنبشی ثانویه

انرژی پتانسیل ثانویه

- اگر در نقطه Q به جسم صلب یک نیروی F و یک گشتاور M وارد شود،

توان لحظه‌ای کل برابر است با:

(اسکالر از جنس انرژی)

$$\boxed{\underset{\text{توان}}{P} = \dot{U}_{1-2} = \frac{dU_{1-2}}{dt} = F \cdot v_Q + M\omega}$$

نرخ انرژی تزریق شده به سیستم:

نرخ تغییرات انرژی جنبشی جسم

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = \dot{T} = R \cdot v_G + M_G\,\omega}$$

سرعت زاویه‌ای مطلق جسم

نیروی برآیند وارد بر جسم (منتقل شده به مرکز جرم)

سرعت مطلق مرکز جرم

برآیند گشتاورهای خارجی حول مرکز جرم

ضربه و مومنتوم (Impulse & Momentum) : اصول مومنتوم خطی و زاویه ای

را قبلاً برای ذرات بررسی نمودیم. برخلاف مبحث کار و انرژی که از ضرب انتگرال بردارهای نیرو و گشتاور در جابجایی های خطی و دورانی حاصل می شد، در این بخش که نیروها تابعی از زمان باشند، کاربرد جدی می یابد (به جای $\int F\cdot dr$ ، $\int F\,dt$)

این قوانین در مواردی

هم
یادآوری :

اصول مومنتوم خطی برای سیستم ذرات :

$$\sum \underset{\sim}{F} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\underset{\sim}{P}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\underset{\sim}{v}}_i$$

و انتگرال ضربه (Impulse Integral) :

$$\underset{\sim}{f} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \underset{\sim}{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\underset{\sim}{P}}\, dt = m\int_{v_1}^{v_2} d\underset{\sim}{v} = m\underset{\sim}{v}_2 - m\underset{\sim}{v}_1$$

- برای جسم صلب خواهیم داشت :

$$\boxed{\underset{\sim}{f} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \underset{\sim}{F}\, dt = m\int_{v_{1G}}^{v_{2G}} d\underset{\sim}{v}_G = m\underset{\sim}{v}_{G_2} - \underset{\sim}{v}_{G_1}}$$

در جهت

$$\begin{cases} (m v_{G_x})_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_{G_x})_2 \\ (m v_{G_y})_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = (m v_{G_y})_2 \end{cases}$$

اگر ضربه $\underset{\sim}{f}$ صفر باشد (یا حداقل در یکی از جهت های مختصات صفر باشد)، مومنتوم خطی سیستم در کل (و یا در همان جهتی که ضربه $\underset{\sim}{f}$ صفر باشد)، پایسته می ماند.

ضربه زاویه‌ای (Angular Impulse)

یادآوری: برای یک ذره:

$$\underset{\sim}{M}^{O}=\dot{\underset{\sim}{H}}^{O}=\frac{d\underset{\sim}{H}^{O}}{dt}\Longrightarrow \boxed{\underset{\sim}{\mathcal{U}}=\int_{t_1}^{t_2}\underset{\sim}{M}^{O}dt=\int_{t_1}^{t_2}dH^{O}=H_2^{O}-H_1^{O}}$$

برای جسم صلب:

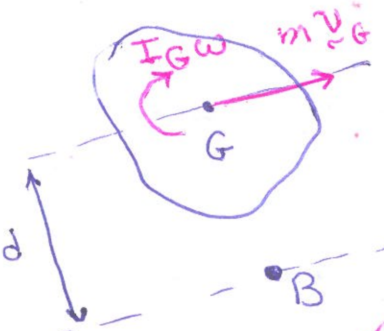
$$\underline{\sum \underset{\sim}{M}_A=\dot{\underset{\sim}{H}}_A}$$ (A یا مرکز جرم یا نقطه ثابت یا شتاب آن در راستای مرکز جرم)

$$\sum \underset{\sim}{M}_A=\frac{d\underset{\sim}{H}_A}{dt}=I_{A\hat{z}}\,\underset{\sim}{\alpha}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underset{\sim}{\mathcal{U}}=\int_{t_1}^{t_2}\sum M_A\,dt=\int_{\underset{\sim}{\omega}_1}^{\underset{\sim}{\omega}_2}I_{A\hat{z}}\,d\underset{\sim}{\omega}=H_2-H_1=I_{A\hat{z}}\,\omega_2-I_{A\hat{z}}\,\omega_1}$$

$$\Longrightarrow I_{A\hat{z}}\,\omega_1+\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\sum M_{A_z}\,dt}=I_{A\hat{z}}\,\omega_2$$

اگر جمع ضربه‌های حول A صفر باشد، مومنتوم زاویه‌ای در راستای ... سیستم حول نقطه A (با یکی از سه شرط معتبر بودن $\sum M_A=\dot H_A$) پایستار می‌ماند



یادآوری:

$$\underset{\sim}{H}_B=(I_G\,\omega)\hat{k}+(m\,v_G\,d)\hat{k}$$

مومنتوم زاویه‌ای حول هر نقطه دلخواه B که می‌تواند ثابت / متحرک بوده و روی جسم یا خارج آن قرار دارد

سیستم اجسام صلب متصل به هم

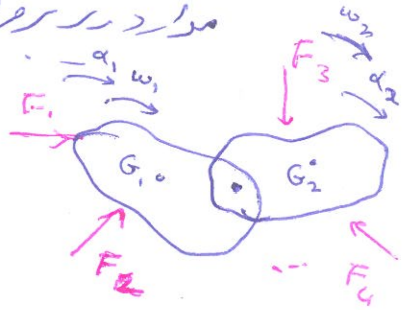
در سیستم پیش روی شما، مجموعه‌ای از اجسام صلب هستند که به هم متصل شده (و حرکت آن‌ها به هم وابسته شده است)، مشابه سیستم ذرات، هم می‌توان مجموعه آن‌ها را با هم به عنوان یک جسم در نظر گرفت و یا اینکه آن‌ها را از یکدیگر جدا کرد و هر جزء را به عنوان یک جسم بررسی کرد.

در حالت اول نیروهای اتصالات نیروهای داخلی بوده و در معادلهٔ حرکت مجموعه مستقیماً وارد نمی‌شوند؛ درحالی‌که در حالت دوم همهٔ آن نیروهای داخلی در معادلات ظاهر می‌شوند. اما این بدان معنی نیست که حالت اول همیشه مفید و حالت دوم بدون کاربرد باشد. از اینکه اجسام صلب در صورت ضرورت را در مفاصل از هم جدا کرده و جداگانه هر جسم را بررسی کنید به هیچ عنوان نترسید! (مشابه آنچه در استاتیک دیدید)، ولی هم نیروهای داخلی به عنوان مجهولات جدید وارد مسئله می‌شوند، اما به ازای بررسی هر جسم تعدادی معادله هم در اختیار شما اضافه می‌شود که ممکن است از حل آن‌ها، مجهولات (نیروهای داخلی) جدید را نیز برای ما تعیین کند. اگر مجموعه اجسام صلب متصل به هم، حرکت صلب کلی نداشته باشند، (با الگوبرداری از سیستم ذرات) معادلات برای هر جسم مجموعه برقرار خواهند بود که نکات ارزشمندی برای بررسی هستند!

- روش حل برای مجموعه‌ی اجسام صلب متصل به هم (که در مجموع ممکن است مجموعه صلبی نباشند)

موارد زیر برقرار است :

زیرا نقطه جدایی برای بررسی نیست!



$$\sum \underset{\sim}{F} = \sum m \tilde{a}_{G_i} = m_{\text{کل}} \, \underset{\sim}{a}_{G_{\text{مجموعه}}}$$

$$\sum \underset{\sim}{M}_O = \sum I_{G_i} \alpha_i + \sum m_i a_{G_i} d$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\sum F}_{\text{جمع نیروهای خارجی}} dt = (\Delta G)_{\text{system}}$$

مومنتوم خطی ($\Delta \underset{\sim}{P}$)

O (ثابت)

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\sum M_O}_{\text{جمع گشتاورهای خارجی}} dt = (\Delta H_O)_{\text{system}}$$

نقطه ثابت

تغییرات مومنتوم زاویه‌ای سیستم حول نقطه ثابت O