کار و انرژی (Work & Energy)

- ذره‌ای را که تحت تأثیر نیروی $\underset{\sim}{F}$ در مسیری به اندازه $d\underset{\sim}{r}$ جابجا می‌شود (و مسیری که به مسافت ds را می‌پیماید) را در نظر می‌گیریم.

$\hookrightarrow ds = |d\underset{\sim}{r}|$

- کار انجام شده توسط نیروی $\underset{\sim}{F}$ در طی این جابجایی دیفرانسیلی $d\underset{\sim}{r}$ برابر است با:

(اسکالر = ارزش انرژی)

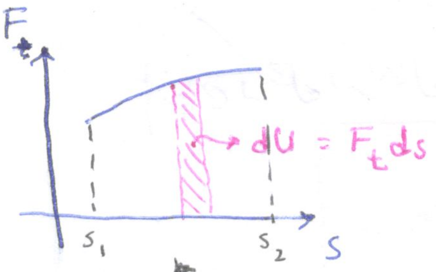
$$dU = \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = F\,ds\cos\alpha$$

(Infinitesimal Work) کار جزئی یا بی‌نهایت کوچک

ضرب نقطه‌ای

(سوال: چه زمانی این عبارت می‌تواند صفر شود؟)

معادل این است که F را به دو مولفه $\underset{\sim}{F}_t = F\cos\alpha\, \underset{\sim}{e}_t$ (در راستای مماس بر مسیر حرکت) و مولفه $\underset{\sim}{F}_n = F\sin\alpha\, \underset{\sim}{e}_n$ (در راستای عمود بر مسیر) تجزیه کرده‌ایم. در این حالت عبارت بالا را می‌توان به شکل $dU = F_t\,ds$ نوشت در حالی که کار مولفه F_n، صفر است!



(نمودار F تابعی از مکان)

$$dU = F_t\,ds$$

$\rightarrow$ (Total Work) کار کل $\equiv U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds \equiv \int_{r_1}^{r_2} \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}$

(حدود انتگرال: ابتدا و انتهای مسیر)

- اگر مولفه‌ی مماسی نیرو در جهت جابجایی جسم باشد، کار مثبت است ← ورود انرژی مثبت به سیستم

- اگر مولفه‌ی مماسی نیرو در خلاف جهت جابجایی جسم باشد، کار منفی است ← خروجی انرژی از سیستم

(نظیر کار نیروی اصطکاک جنبشی)

- اگر مولفه‌ی مماسی نیرو صفر باشد (= نیرو عمود بر مسیر حرکت باشد)، کار صفر است.

(عدم تغییر انرژی ... سیستم)

* نیروهایی که کار انجام می‌دهند، نیروهای فعال و نیروهایی که کار انجام نمی‌دهند، نیروهای غیرفعال نامیده می‌شوند.

(مثل نیروی عمودی سطح N در طول حرکت بر مسیر مستقیم یا منحنی الخط)

* اما حالت دیگری هم وجود دارد که کار انجام شده صفر شود!

1) $F = 0$

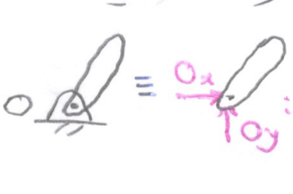
2) $\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

و 3) $ds = 0$ (!) → زمانی که محل اثر اعمال نیروها ثابت شود

حالت خاص: کل جسم ساکن باشد! (← بدیهی است)

آن نقطه‌ای از جسم که نیرو وارد می‌شود دارای سرعت (لحظه‌ای) صفر در جهت نیرو باشد. (مثلاً کار نیروی اصطکاک ایستایی در حرکت غلتش بدون لغزش!

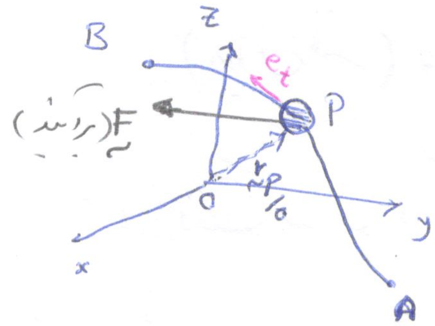
(کار نیروی اصطکاک ایستایی صفر است)



(کار نیروهای تکیه‌گاهی صفر است)

اصل کار و انرژی جنبشی (Principle of Work and Kinetic Energy)

* کل کار انجام شده توسط نیروهای خارجی وارد بر یک ذره در بردن آن از یک مکان به مکان دیگر در کل طول مسیر برابر است با تغییر در انرژی جنبشی آن ذره.



$$U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} F \cdot dr = \int_{s_A}^{s_B} F_t \, ds = \int_{s_A}^{s_B} (m a_t) \, ds \overset{\oplus}{=} \int_{v_A}^{v_B} m v \, dv$$

نیروی برآیند در جهت مماسی

$$\oplus \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \Longrightarrow a_t \, ds = v \, dv$$

$$\Longrightarrow U_{AB} = \int_{v_A}^{v_B} m v \, dv = m \frac{v^2}{2} \Big|_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_{AB} = \int F \cdot dr = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = T_B - T_A}$$

دارای واحد انرژی (مثل ژول)

معادله کار و انرژی برای یک ذره

که در آن $T = \frac{1}{2} m v^2$ انرژی جنبشی ذره می‌باشد. ⟸ انرژی جنبشی یک ذره برابر با کاری است که بایستی روی یک ذره انجام شود تا از حالت سکون به سرعت v برسد.

← بدون نیاز به محاسبه شتاب و سپس انتگرال‌گیری / محاسبه معادله حرکت نسبت به زمان، مستقیماً تغییرات سرعت ذره قابل محاسبه است.

اگر در حال بهره‌گیری از معادله کار و انرژی برای فقط یک ذره هستید، باید (مشابه رسم دیاگرام آزاد و نوشتن معادلات نیوتن)، تمامی نیروهای خارجی وارد بر ذره را در نظر گرفته و کار آن‌ها را محاسبه نمائید؛ اما اگر سیستمی از ذرات که به صورت صلب (بدون فنر) و بدون اصطکاک در مفاصل به هم متصل شده‌اند را بررسی می‌کنید، کافی است که فقط دیاگرام نیروهای فعال (و نه کل دیاگرام آزاد سیستم ذرات) را رسم کنید که در حال انجام کار روی سیستم می‌باشند. (← زیرا نیروهای وارد در اتصالات باهم برابر و در خلاف جهت یکدیگر بوده و اندازه جابجایی محل اعمال آن‌ها در راستای نیروها یکسان می‌باشد. بنابراین کل کار انجام شده به وسیله این نیروهای داخلی صفر خواهد بود.)

توان (قدرت) (Power): نرخ تغییرات زمانی کار را توان گویند.

(The time rate of doing work)

$$\underset{(J/s)}{P} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \quad (\equiv \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega})$$

ممان حاصله از نیروهای خارجی — بردار سرعت زاویه‌ای

(Watt) وات $\equiv$ (J/s)

واحد توان:

$1\ \frac{N.m}{s} = 1\ \frac{J}{s} = 1$ watt → (واحد توان در SI)

1 hp ($\equiv$ horsepower) (اسب بخار) $\equiv$ 746 watt = 0.746 kw — (واحد توان در سیستم آمریکایی) ←

$1\ hp \equiv 550\ \frac{ft.lb}{sec} \equiv 33000\ \frac{ft.lb}{min}$

بازده (Efficiency): نسبت کار انجام شده توسط یک ماشین در یک مدت زمانی مشخص، به کار انجام شده بر روی ماشین را بازده مکانیکی آن ماشین گویند.

$$0 < e_m = \frac{P_{output}}{P_{input}} = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}} < 1$$

(در عمل)

- یک سیستم می‌تواند ~~[illegible]~~ اتلاف‌های گرمایی و الکتریکی نیز داشته باشد که در این صورت بازده کل سیستم از حاصلضرب بازده‌های مکانیکی، الکتریکی و گرمایی حاصل می‌شود:

$$e = e_m \cdot e_e \cdot e_{th}$$

انرژی پتانسیل و سیستم‌های پایستار (Conservative Systems & Potential Energy)

* در محاسبه کار خواهیم:

1) نیروی $\underset{\sim}{F}$ تنها تابعی از مکان ذره باشد ($\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{r}) = \underset{\sim}{F}(s)$) و

2) انتگرال خطی $\int_A^B \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}$ تابعی از نقاط ابتدائی و انتهائی بوده و مستقل از مسیر بین نقاط A و B باشد (← به عبارتی کار انجام شده توسط نیرو فقط به نقاط ابتدائی و انتهائی مسیر بستگی داشته باشد)

آنگاه برای این میدان نیرو می‌توان یک تابع پتانسیل تعریف نمود و از اختلاف انرژی پتانسیل در دو نقطه انتهائی جهت محاسبه کار نیرو بهره برد. بنابراین:

$${}_AU_B = \underbrace{\int_A^B \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}} = \int_{V_1}^{V_2} -dV = -(V_2 - V_1)$$

← در حالت کلی حاصل این انتگرال تابعی از مسیر بین A و B است

انرژی پتانسیل: انرژی جسم ناشی از مکان آن جسم

از ضابطه گفته شده در بالا، $\underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}$ دیفرانسیل کامل بوده و می‌توان یک تابع اسکالر V یافت به نحوی که $dV = -(\underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r})$ باشد.

- موارد تکمیلی: در این حالت داریم:

$${}_AU_B = \int_A^B \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = -\int_B^A \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = -{}_BU_A$$

$$\oint \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = 0$$ انتگرال روی مسیر بسته صفر است

نیروی پایستار (Conservative Force) : نیروهایی که دو شرط بیان شده را دارا باشند (به عبارتی انتگرال $\underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}$ روی مسیرهای بسته صفر شد) و با کار انجام شده آن‌ها مستقل از مسیر باشد، نیروهای پایستار نامیده می‌شوند. (مانند نیروی جاذبه $F=\frac{GmM}{r^2}$ و یا نیروی فنر $F=-kx$) منشأ این نیروها، نامیرا (زمین مرجعی) است و با جابجایی جسم از حالتی به حالت دیگر تبدیل می‌شوند و با بازگشت جسم به نقطه قبلی، مجدداً به مقدار قبلی برمی‌گردند.

$$\underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = (F_x \underset{\sim}{i} + F_y \underset{\sim}{j} + F_z \hat{k})\cdot(dx\,\underset{\sim}{i} + dy\,\underset{\sim}{j} + dz\,\underset{\sim}{k})$$

$$= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \quad (1)$$

اگر F پایستار باشد $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r}$ دیفرانسیل کامل $\Rightarrow$ V موجود است بطوری که:

$$\underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = -dV = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Longrightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Longrightarrow \text{یا}\quad F = -\nabla V$$

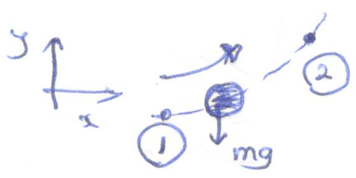
$$\left(\nabla = \underset{\sim}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underset{\sim}{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underset{\sim}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

← هرگاه مولفه‌های نیرو از تابع پتانسیل قابل استخراج باشند، نیرو پایستار بوده و کار انجام شده توسط آن مستقل از مسیر حرکت است.

* دو مثال معروف نیروهای پایستار در سیستم های مکانیکی، انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل (کشسانی) فنر می باشد.

۱) انرژی پتانسیل گرانشی :

الف) حرکت نزدیک سطح زمین (فرض ثابت بودن g) :

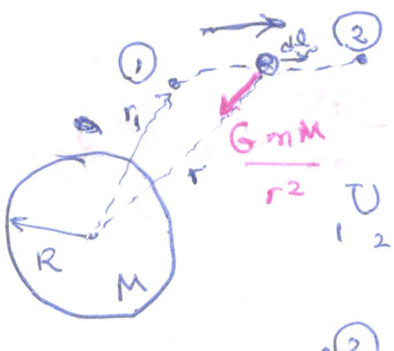


$${}_1U_2 = U_{1-2} = \int_1^2 \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} = \int_1^2 (-mg\,\underset{\sim}{j})\cdot(dx\,\underset{\sim}{i} + dy\,\underset{\sim}{j})$$

$$= -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -\underbrace{mgy}_{V(y)}\Big|_{y_1}^{y_2} = -mg(y_2-y_1)$$

انرژی پتانسیل مکان : $V(y)$

ب) اگر تغییرات ارتفاع جسم قابل توجه باشد :



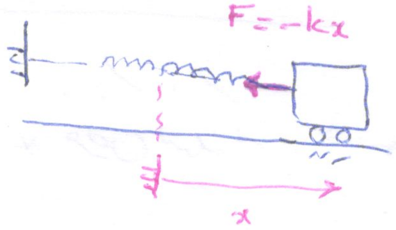
$${}_1U_2 = U_{1-2} = \int_1^2 \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{\ell} = \int_1^2 \left(-\frac{GmM}{r^2}\,\underset{\sim}{e_r}\right)\cdot\left(dr\,\underset{\sim}{e_r} + r\,d\theta\,\underset{\sim}{e_\theta}\right)$$

$$= \int_1^2 -\frac{GmM}{r^2}\,dr = -GmM\int_1^2 \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{GmM}{r} = -\underbrace{\left(-\frac{GmM}{r}\right)}_{V(r)}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

(در بینهایت صفر تعریف می‌شود) انرژی پتانسیل : $V(r)$

2) انرژی پتانسیل فنر:



$${}_1U_2 = U_{1\to 2} = \int_{1}^{2} \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{r} =$$

$$= \int_{1}^{2} (-kx\,\underset{\sim}{i})\cdot(dx\,\underset{\sim}{i})$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}kx^2}_{\text{انرژی پتانسیل کشسانی}:\ V(x)}\Big|_{1}^{2} = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

توجه: x_1 و x_2 هر یک از طول آزاد فنر محاسبه می‌شوند!

* تذکر: در همه میدان‌های پتانسیل ذکر شده $V=-mgy+C$ و $V=-\frac{GmM}{r}+C$ و $V=\frac{1}{2}kx^2+C$ ، ثابت C کاملاً اختیاری است. (مکانی که انرژی پتانسیل صفر است (≡ مرجع) را Datum می‌نامیم.)

اصل کلی کار و انرژی (General Work-Energy Principle):

* فرض کنید که به جسم مورد مطالعه ما دو گونه نیروهای پایستار (C) و نیروهای غیر پایستار (N.C) وارد می گردد. با جدا کردن بخش کار نیروهای پایستار از فرمول $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ و بازنویسی آن به شکل اختلاف پتانسیل (نظیر اختلاف پتانسیل گرانشی و یا کشسان فنر) به رابطه کلی زیر می رسیم:

non-Conservative

$$\underbrace{{}_{A}U_{B}}_{\text{کار کل تمامی نیروهای خارجی اعم از پایستار و ناپایستار}} = \underbrace{T_B - T_A}_{\text{تغییرات انرژی جنبشی}} = \underbrace{-(V_B - V_A)}_{\text{کار نیروهای پایستار که به شکل اختلاف پتانسیل ابتدا و انتهای مسیر نوشته شده است}} + \underbrace{{}_{A}U_{B}^{N.C.}}_{\text{کار نیروهای ناپایستار}} \quad (*)$$

کار نیروهای ناپایستار (شامل تمامی نیروها به جز گرانش و فنر) به صورت $\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$ بایستی محاسبه گردد.

$$(*) \Rightarrow \boxed{\underbrace{(T_A + V_A)}_{E_A} + {}_{A}U_{B}^{N.C.} = \underbrace{(T_B + V_B)}_{E_B}}$$

E_A: انرژی مکانیکی کل سیستم در نقطه A

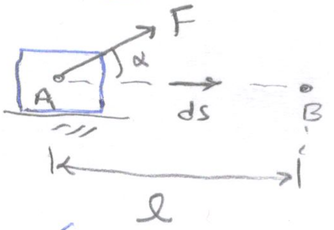
E_B: انرژی مکانیکی کل سیستم در نقطه B

کار نیروهای ناپایستار به شکل تزریق انرژی و یا تخلیه انرژی در انرژی مکانیکی سیستم تاثیر می گذارد.

- حال می‌توان رابطه (**) را اینگونه بازنویسی کرد:

- اگر کار نیروهای ناپایستار وارد شده بر جسم + باشد، انرژی کل مکانیکی سیستم افزایش می‌یابد (افزایش انرژی)

مثال:



$$U_{AB}^{N.C} = F\cdot l\cos\alpha > 0$$

$$\Rightarrow E_B > E_A$$

- اگر کار نیروهای ناپایستار وارد شده بر جسم منفی باشد، انرژی کل مکانیکی سیستم کاهش می‌یابد (کاهش انرژی سیستم)

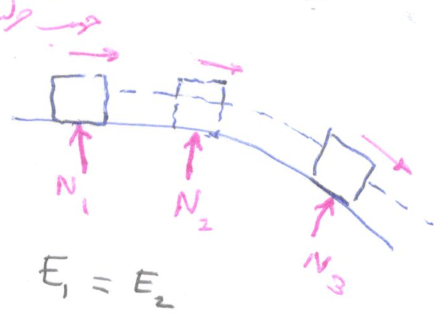
$f_k = \mu_k N$

$$U_{AB} = -f_k\cdot l < 0$$

$$\Rightarrow E_B < E_A$$

- اگر کار نیروهای ناپایستار وارد شده صفر باشد، انرژی کل مکانیکی سیستم تغییری نمی‌کند

$(\underset{\sim}{F} \perp \underset{\sim}{dr})$



مثال ۱: کار نیروی عمودی سطح در طول حرکت جسم

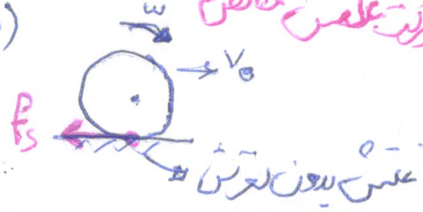
$E_1 = E_2$

$(\underset{\sim}{dr} = \underset{\sim}{0})$

مثال 2: کار نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه ثابت (= سرعت نقطه اثر نیرو صفر است)

$E_1 = E_2$

$(\underset{\sim}{dr} = \underset{\sim}{0})$



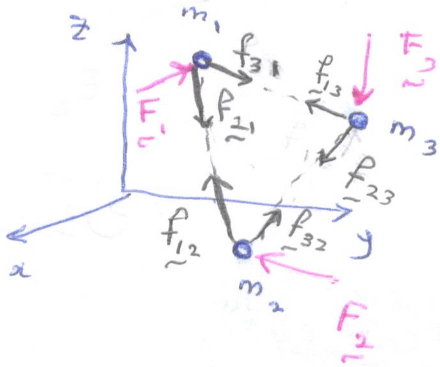
مثال 3: کار نیروی اصطکاک ایستایی در حرکت غلتش خالص

$E_1 = E_2$

معادله حرکت نیوتن و اصل کار و انرژی برای سیستمی از ذرات :
(Systems of Particles)

- تاکنون اجسام بزرگ ($\equiv$ تحلیل دارای بُعد) را به صورت ذره مدل کردیم. اکنون که آن‌ها را به صورت مجموعه ($\equiv$ سیستمی) از ذرات در نظر گرفته شده، جرم سیستم از مجموع جرم اجزای آن بدست می‌آید: $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

- حال سیستمی از ذرات را همراه با نیروهای وارد بر آن در نظر بگیرید:



$\underset{\sim}{F}_i \equiv$ نیروی برآیند وارد بر ذره i ام از محیط خارج از سیستم

$-\underset{\sim}{f}_{ji} = \underset{\sim}{f}_{ij} \quad (i \neq j) \equiv$ نیروهای داخلی وارد بر ذره i ام از طرف ذره j ام

- با به کارگیری قانون دوم نیوتن داریم:

برای ذره i ام :
$$\underset{\sim}{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underset{\sim}{f}_{ji} = m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_{i/o}$$

معادله روی تمام ذرات جمع را جمع می‌زنیم →

$(\underset{\sim}{f}_{ij} = -\underset{\sim}{f}_{ji})$

$$\sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{F}_i + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underset{\sim}{f}_{ij}}}_{=\underset{\sim}{0}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_{i/o}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{F}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_{i/o} = \frac{d^2}{dt^2}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underset{\sim}{r}_{i/o}}_{= m\, \underset{\sim}{r}_{c/o}}\Big)$$

بردار مکان مرکز جرم

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{F}_{total} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{F}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left(m\, \underset{\sim}{r}_{c/o}\right) = m\, \ddot{r}_{c/o} = m\, \underset{\sim}{a}_c \overset{t}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i a_i$$

مکان مرکز جرم — شتاب مرکز جرم — جرم کل — شتاب ذره

اصل کار و انرژی برای سیستمی از ذرات:

برای سیستمی از N ذره، اصل کار و انرژی به شرح زیر قابل بیان است:

$$\underbrace{(T_1 + V_1)}_{E_1} + {}_1U_2^{N.C.} = \underbrace{(T_2 + V_2)}_{E_2}$$

که در آن:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \left(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2\right) \equiv$$ انرژی جنبشی کل سیستم

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i \equiv$$ انرژی پتانسیل کل سیستم (شامل گرانشی، کشسانی و ...)

$${}_1U_2^{N.C.} =$$ کار کل انجام شده توسط نیروهای ناپایستار