



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه دکتری

گرایش مخابرات سیستم

# نمونه برداری فشرده با روش‌های غیر تصادفی

نگارنده

آرش امینی

استاد راهنما

دکتر فرخ مروستی

بهمن ۱۳۸۹

این پروژه تحت قرارداد پژوهشی شماره ۵۰۰/۶۹۴۷ مورخ ۱۳۸۸/۲/۱۴ از پشتیبانی مادی و معنوی

مرکز تحقیقات مخابرات ایران بهره‌مند شده است.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

### توجه

این پروژه بر اساس قرارداد شماره (۵۰۰/۶۹۴۷) از حمایت مالی مرکز تحقیقات مخابرات ایران برخوردار شده است.

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده مهندسی برق

پایان نامه دکتری

عنوان: نمونه برداری فشرده با روش های غیرتصادفی

نگارش: آرش امینی

اعضا هیات داوران:

امضاء:.....

دکتر فرخ مروستی

امضاء:.....

دکتر محمدرضا عارف

امضاء:.....

دکتر جواد صالحی

امضاء:.....

دکتر پاییز عزمی

امضاء:.....

دکتر بابک سیف

امضاء:.....

دکتر کسری علیشاهی

امضاء:.....

Dr. Michael Unser

تاریخ: ۲۰ بهمن ۱۳۸۹.

## تقدیم و قدردانی

طی مراحل اجرای این پایان‌نامه از مساعدت و همراهی بسیاری از دوستان بهره‌مند بودم که بر خود لازم می‌دانم در این جا از آن‌ها تشکر کنم. ترتیب ذکر اسامی این افراد، الفبایی است:

علی اخایی، امیر اکبری، پدرام پاد، پوریا پاکروح، امین توکلی، آرین حاذقی، فرزانه حدادی، احمدرضا حسینی، پویا دهقان‌تفتی، سینا زاهدپور، علی سالمی، مهدی سلطان‌الکتابی، مجتبی سلطان‌علیان، میلاد شریف، مهدی عالم، محسن غفاری، محمود فردوسی‌زاده، فرشید فرهت، سهیل فیض‌خانکندی، امین کرباسی، رامتین مدنی، وحید منتظرحجت، پیمان مهاجرین‌اصفهانی و مجید ولی‌الله‌زاده.

نهایت سپاس خود را نثار خانواده‌ام می‌کنم که همواره پشتیبان و مشوقم بوده‌اند؛ به‌ویژه مادرم، مهران مجدی، که زحمت تایپ و ویراستاری این پایان‌نامه را بر عهده داشت.

از جناب آقای دکتر بابک سیف به دلیل مطالعه دقیق و بهبود کیفیت متن پایان‌نامه، قدردانی می‌کنم. موفقیت خود را در اتمام دوره دکتری مدیون راهنمایی‌ها و حمایت‌های جناب آقای دکتر فرخ مروستی هستم که مرا همچون فرزند خویش مورد لطف و محبت قرار داد.

و در انتها، این پایان‌نامه را به همسر عزیز و فداکارم، میترا فاطمی، تقدیم می‌کنم که در طول دوره دکتری، نه تنها مرا همراهی نمود، بلکه در بسیاری از موارد با از خودگذشتگی مرا مورد حمایت خویش قرار داد.

### چکیده:

در مبحث نمونه برداری فشرده، به دنبال نمایش سیگنال‌های تنک با کمترین تعداد نمونه ممکن هستیم به نحوی که نمونه‌ها به طور یکتا بردار تنک را مشخص کنند. در این پایان‌نامه، مسأله نمونه‌برداری فشرده با ساختار معین (در مقابل تصادفی) از چندین دیدگاه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نحوه نمونه‌برداری در تمام روشهای ارائه شده تا کنون به صورت خطی و توسط یک ماتریس که عمدتاً تصادفی است، در نظر گرفته شده است. در این پایان‌نامه ابتدا چند روش تولید ماتریس معرفی می‌شود که یکی از آنها یک روش مبتنی بر کدهای متعامد نوری برای ساخت ماتریس‌های باینری است. در روشی دیگر، به کمک کدهای BCH راه‌کاری برای تولید ماتریس‌های دو قطبی ارائه می‌دهیم. کدهای بلوکی گردشی علاوه بر آن که قابلیت ساخت ماتریس نمونه‌برداری را فراهم می‌کنند، پیچیدگی محاسباتی در روند بازسازی سیگنال تنک را نیز کاهش می‌دهند. همچنین به کمک تعمیم کدهای BCH، ماتریس‌های مختلط را معرفی می‌کنیم. این ماتریس‌ها از نظر ابعاد تنوع بیشتری ایجاد می‌کنند و در نتیجه راحت‌تر می‌توان آن‌ها را با ساختارهای واقعی منطبق کرد. علاوه بر طرح‌های تولید ماتریس، در گام بعدی روش‌هایی برای ادغام این ماتریس‌ها ارائه می‌کنیم به گونه‌ای که ماتریس حاصل همچنان شرایط لازم ماتریس‌های نمونه‌برداری را داراست و به علاوه طیف وسیع‌تری از ابعاد را پوشش می‌دهد.

جدا از مبحث نمونه‌برداری خطی، روش‌های غیرخطی و مزایای آن‌ها را نیز بررسی می‌کنیم. در صورتی که حوزه تنک‌بودن برای سیگنال‌های مورد نظر مشخص نباشد، هیچ روش خطی نمی‌تواند بازسازی کامل را تضمین کند. در این جا نشان می‌دهیم که در چنین شرایطی می‌توان به کمک روش‌های غیرخطی سیگنال‌های تک-تنک را بازسازی کرد. علاوه بر این در صورت مشخص بودن حوزه تنک‌بودن، می‌توان به کمک روش‌های غیرخطی، همزمان تعداد نمونه‌های لازم و پیچیدگی محاسباتی در نحوه بازسازی را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد. علی‌رغم تمام مزایای روش‌های غیرخطی، مشکل اصلی این روش‌ها حساسیت نسبت به نویز جمعی است.

در مبانی نمونه‌برداری فشرده، هدف ادغام دو عمل نمونه‌برداری و فشرده‌سازی است. از این رو، فرض واقعی‌تر آن است که سیگنال‌های ورودی پیوسته‌اند و نه گسسته. اما اولین مشکل در این راه، تعریف مفاهیم تنک‌بودن و فشرده‌پذیری برای سیگنال‌های پیوسته است. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که این دو مفهوم را می‌توان به طور مناسبی به دنباله‌های نامتناهی یقینی و حتی تصادفی تعمیم داد. این مرحله در حقیقت اولین گام برای تعمیم مباحث نمونه‌برداری فشرده به مجموعه‌های بی‌نهایت بعدی و پیوسته از سیگنال‌هاست.

همان طور که اشاره شد، مفهوم تنک بودن اغلب بر روی بردارها مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما پیشتر تعمیم مفهوم تنک بودن برای ماتریس بر اساس رتبه آن (به جای مقادیر درایه‌ها) نیز مورد توجه قرار گرفته است. در انتهای پایان‌نامه به بررسی مسأله خاصی در مورد ماتریس‌های تنک (به مفهوم رتبه) می‌پردازیم. به طور دقیق‌تر، بررسی می‌کنیم که چگونه می‌توان یک ماتریس کم‌رتبه را که درایه‌های آن تحت تاثیر یک اعوجاج غیرخطی یکسان قرار گرفته‌اند، بازیابی و در نتیجه فشرده کرد.

### کلمات کلیدی:

- |   |                      |
|---|----------------------|
| ۱- نمونه برداری فشرده                   | . Compressed Sensing |
| ۲- تنک بودن                             | . Sparsity           |
| ۳- تصویر خطی                            | . Linear Projection  |
| ۴- نمونه برداری غیرخطی                  | . Nonlinear Sampling |
| ۵- دنباله تصادفی با توزیع مستقل یکنواخت | . i.i.d. Sequence    |
| ۶- فشرده پذیری                          | . Compressibility    |
| ۷- ماتریس کم‌رتبه                       | . Low-rank Matrix    |

# فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۱	۱-۱ نمونه برداری شانون تا نمونه برداری فشرده	۱
۳	۲-۱ نمونه برداری فشرده	۳
۸	۳-۱ کاربردهای نمونه برداری فشرده	۸
۹	۴-۱ تکمیل ماتریس	۹
۱۰	۵-۱ طبقه بندی مطالب پایان نامه	۱۰
۱۲	۲ کلیات نمونه برداری فشرده	۱۲
۱۲	۱-۲ مقدمه	۱۲
۱۲	۲-۲ عرض گلفاند	۱۲
۱۶	۳-۲ بررسی نمونه برداری فشرده از دیدگاه نظریه نرخ-اعوجاج	۱۶
۱۸	۴-۲ ارتباط نمونه برداری فشرده با نظریه کدگذاری	۱۸
۲۱	۵-۲ مروری بر روش های بازسازی	۲۱
۲۱	۱-۵-۲ کمینه کردن نرم $l_1$	۲۱
۲۳	۲-۵-۲ روش های حریص	۲۳
۲۴	۳-۵-۲ روش های آستانه ای	۲۴
۲۵	۴-۵-۲ روش های تقریب نرم	۲۵



۲۷	۳	مروری بر ماتریس های حسگر
۲۷	۱-۳	مقدمه
۲۸	۲-۳	ماتریس های حسگر تصادفی
۳۱	۳-۳	ماتریس های حسگر غیر تصادفی
۳۹	۴	ماتریس های حسگر غیر تصادفی پیشنهادی
۳۹	۱-۴	مقدمه
۴۰	۲-۴	ماتریس های دودویی
۴۳	۳-۴	ماتریس های دو قطبی به کمک کدهای BCH
۴۴	۱-۳-۴	کدهای BCH با $\bar{d}_{min}$ بزرگ
۴۸	۲-۳-۴	الگوریتم تولید ماتریس
۵۰	۴-۴	ماتریس های مختلط به کمک کدهای غیر دودویی
۵۳	۱-۴-۴	کدهای pBCH-سمبلی با $\bar{d}_{min}$ بزرگ
۵۶	۲-۴-۴	الگوریتم تولید ماتریس
۵۷	۵-۴	ادغام ماتریس ها
۵۸	۱-۵-۴	ادغام با ماتریس های دودویی
۶۰	۲-۵-۴	ضرب کرونگر
۶۱	۶-۴	بازسازی سریع
۶۴	۷-۴	نتایج شبیه سازی
۷۰	۵	نمونه برداری غیر تصادفی غیر خطی
۷۰	۱-۵	مقدمه
۷۰	۲-۵	نمونه برداری غیر تصادفی برای حوزه تنک بودن نامعلوم
۷۶	۳-۵	نمونه برداری غیر تصادفی برای حوزه تنک بودن معلوم
۸۱	۴-۵	نتایج شبیه سازی

۸۳	۶ دنباله‌های تصادفی فشرده‌پذیر
۸۳	۱-۶ مقدمه
۸۴	۲-۶ دنباله‌های نامتناهی فشرده‌پذیر
۸۶	۳-۶ فشرده‌پذیری دنباله‌های تصادفی
۸۸	۴-۶ تشخیص توزیع احتمال‌های فشرده‌پذیر
۹۶	۵-۶ نتایج عددی
۹۹	۷ کاهش رتبه در ماتریس‌ها به کمک عملگرهای المانی
۹۹	۱-۷ مقدمه
۱۰۲	۲-۷ نمادها و شرح مساله
۱۰۳	۳-۷ توان صحیح
۱۰۵	۴-۷ توان حقیقی
۱۰۹	۵-۷ نتایج عددی
۱۱۲	۸ جمع بندی و نتیجه‌گیری
۱۱۵	الف محاسبه $\bar{k}$
۱۱۸	ب محاسبه $\delta$

## فهرست جداول

۵۰	..... چند جمله‌ای آزمون توازن برای مقادیر متفاوت $\bar{m}$ و $i = 3$	۱-۴
۵۶	..... $\frac{\mu_{BCH}}{\mu_{WB}}$ برای چند ماتریس $p$ -سمبلی $(p^{2l} - 1) \times p^{2l}$ با $p$ های مختلف	۲-۴
۹۵	..... تعدادی از توزیع‌های فشردده‌پذیر با میرایی مرتبه $ t ^{-(q+1)}$	۱-۶

## فهرست اشکال

۱-۱	(a) یک بردار تنک در فضای سه بعدی، (b) تقریب حاصل از کمینه‌سازی نرم $\ell_2$ برای این بردار، (c) تقریب حاصل از کمینه‌سازی نرم $\ell_1$ برای این بردار [۱۰].	۶
۱-۴	درجه چندجمله‌ای $h(x)$ برای مقادیر متفاوت $m$ و $n$ .	۵۰
۲-۴	عمل ادغام ماتریس $B$ با ماتریس دودویی $A$ .	۵۹
۳-۴	ضرب کرونگر دو ماتریس ( $C = A \otimes B$ ).	۶۰
۴-۴	درصد بازسازی ( $SNR_{rec.} \geq 100dB$ ) در مقادیر مختلف $k$ . ماتریس‌های حسگر با ساختار OOC و Devore ابعاد $63 \times 378$ و $64 \times 378$ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی دودویی با ابعاد $64 \times 378$ و $63 \times 378$ در نظر گرفته شده‌اند.	۶۴
۵-۴	درصد بازسازی ( $SNR_{rec.} \geq 100dB$ ) در مقادیر مختلف $k$ . ماتریس‌های حسگر با ساختار Devore، BCH و ادغامی (Ternary) ابعاد $63 \times 512$ ، $64 \times 512$ و $49 \times 512$ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی گوسی ابعاد $64 \times 512$ و $49 \times 512$ دارند.	۶۵
۶-۴	$SNR$ سیگنال‌های ۱۵-تنک بازسازی شده هنگامی که نمونه‌های فشرده تحت تاثیر نویز جمعی با توان‌های متفاوتی قرار گیرند. ماتریس‌های حسگر با ساختار Devore، BCH و ادغامی (Ternary) ابعاد $63 \times 512$ ، $64 \times 512$ و $49 \times 512$ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی گوسی ابعاد $64 \times 512$ و $49 \times 512$ دارند.	۶۶
۷-۴	درصد بازسازی کامل ( $SNR_{rec.} \geq 100dB$ ) هنگامی که نمونه‌ها بدون نویز هستند. ماتریس BCH بر مبنای کدهای $p = 3$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها $80 \times 729$ است.	۶۷
۸-۴	$SNR$ سیگنال ۲۵-تنک بازسازی شده برای توان‌های متفاوت نویز جمعی. ماتریس BCH بر مبنای کدهای $p = 3$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها $80 \times 729$ است.	۶۸
۹-۴	$SNR$ سیگنال ۲۵-تنک بازسازی شده برای توان‌های متفاوت نویز جمعی. ماتریس BCH بر مبنای کدهای $p = 5$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها $15625 \times 624$ است.	۶۸
۱۰-۴	درصد بازسازی کامل ( $SNR_{rec.} \geq 100dB$ ) هنگامی که نمونه‌ها بدون نویز هستند. ابعاد ماتریس‌های بر مبنای ادغام دودویی، ادغام کرونگر، توابع Chirp، تصادفی گوسی و سطرهای تصادفی ماتریس DFT به ترتیب عبارتند از $64 \times 4608$ ، $63 \times 1728$ ، $64 \times 4608$ ، $75 \times 4608$ و $64 \times 4608$ .	۶۹

- ۱۱-۴ مقایسه زمان لازم برای بازسازی یک بردار تنک  $1 \times 15625$  از نمونه‌های فشرده  $1 \times 624$  توسط ماتریس تصادفی (OMP ساده) و ماتریس‌های  $p = 5$  BCH سمبلی (OMP تسریع شده). ۶۹
- ۱-۵ کیفیت سیگنال بازسازی شده توسط نمونه‌های غیرخطی برای مرتبه‌های متفاوت تنک بودن. ۸۱
- ۲-۵ کیفیت سیگنال بازسازی شده توسط نمونه‌های غیرخطی به ازای  $k = 6$  در OSR‌های متفاوت. ۸۲
- ۱-۶ یک تحقق زمانی از دنباله تصادفی و i.i.d. با توزیع احتمال Student's  $t$  و پارامتر  $q = 0.5$ . ۹۶
- ۲-۶ نمودارهای متوسط تابع  $\frac{\sigma_p(k; \{a_i\}_{i=1}^n)}{\sigma_p(n; \{a_i\}_{i=1}^n)}$  بر حسب  $\frac{k}{n}$  برای تحقق‌های i.i.d. از توزیع احتمال‌های گوسی، لاپلاس، کوشی و Student's  $t$  ( $q = 0.5$ ) به ازای  $p = 1$  و  $n = 10^4$ . ۹۷
- ۳-۶ نمودارهای متوسط تابع  $\frac{\sigma_p(k; \{a_i\}_{i=1}^n)}{\sigma_p(n; \{a_i\}_{i=1}^n)}$  بر حسب  $\frac{k}{n}$  در  $n$ ‌های مختلف برای تحقق‌های i.i.d. از توزیع احتمال کوشی هنگامی که  $p = 0.9$  و  $p = 1/1$  مورد نظر باشند. ۹۸
- ۱-۷ آرایش دایروی حسگرها در توموگرافی فراصوتی. ۱۰۱
- ۲-۷ (a) ضرایب بسط تیلور  $T_{\mathbb{B}}(x)$  و (b) مقادیر چندجمله‌ای‌های حاصل از در نظر گرفتن متناهی جمله بسط تیلور  $T_{\mathbb{B}}(x)$  پس از حذف فاکتور  $x^4$  هنگامی که نویز جمعی در حد  $\text{SNR} = 100 \text{ dB}$  است. ۱۱۰
- ۳-۷ (a) ضرایب بسط تیلور  $T_{\mathbb{B}}(x)$  و (b) مقادیر چندجمله‌ای‌های حاصل از در نظر گرفتن متناهی جمله بسط تیلور  $T_{\mathbb{B}}(x)$  پس از حذف فاکتور  $x^4$  هنگامی که نویز جمعی در حد  $\text{SNR} = 50 \text{ dB}$  است. ۱۱۰
- ۱-الف مقادیر بدون تقریب  $\kappa_b^{(a)}$  در چند انتخاب متفاوت از  $a$  و  $b$ . ۱۱۷

# فهرست کلمات اختصاری

BP	Basis Pursuit
CFAR	Constant False Alarm Rate
CS	Compressed Sensing
DCT	Discrete Cosine Transform
DFT	Discrete Fourier Transform
FFT	Fast Fourier Transform
FISTA	Fast ISTA
GPSR	Gradient Projection for Sparse Reconstruction
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform
IHT	Iterative Hard Thresholding
IMAT	Iterative Method with Adaptive Thresholding
ISTA	Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm
LS	Least Squares
MP	Matching Pursuit
OMP	Orthogonal Matching Pursuit
OOC	Optical Orthogonal Code
OSR	Over-Sampling Ratio
RIP	Restricted Isometry Property
RS	Reed-Solomon
SL0	Smoothed $\ell_0$ norm
SPGL1	Spectral Projected-Gradient $\ell_1$ norm
SNR	Signal to Noise Ratio
SVD	Singular Value Decomposition