

فصل ۵

نمونه برداری غیر تصادفی غیر خطی

۱-۵ مقدمه

در فصل‌های پیشین دیدیم که ماتریس‌های تصادفی، مستقل از حوزه تنک‌بودن سیگنال (ماتریس Ψ)، قادر به انجام عمل نمونه‌برداری با احتمال بازسازی مطلوب (به اندازه کافی بزرگ) هستند. از سوی دیگر، در صورت معلوم بودن حوزه تنک‌بودن، روش‌هایی برای طراحی ماتریس حسگر یقینی معرفی کردیم که بازسازی کامل را تضمین می‌کنند. برای این منظور مساله را در دو حالت معلوم و یا نامعلوم بودن حوزه تنک‌بودن بررسی می‌کنیم. در حالت حوزه معلوم، بررسی می‌کنیم که آیا با غیرخطی کردن نحوه نمونه‌برداری می‌توان در نرخ فشرده‌سازی و یا پیچیدگی محاسباتی در بازسازی به بهبودی دست یافت. قسمتی از مطالب این فصل بر گرفته از [۵] هستند.

۲-۵ نمونه‌برداری غیر تصادفی برای حوزه تنک‌بودن نامعلوم

در این بخش به دنبال بررسی مساله نمونه‌برداری یقینی، هنگام ناشناخته بودن حوزه تنک‌بودن سیگنال هستیم؛ به بیان دیگر، اگر Ψ در هنگام نمونه‌برداری معلوم نباشد، آیا می‌توان از یک روش نمونه‌برداری ثابت و غیر تصادفی استفاده کرد بدون این که قابلیت بازسازی از بین برود؟ در این جا، نمونه‌برداری لزوماً به روش‌های خطی مثل استفاده از یک ماتریس Φ محدود نیست. یعنی در حالت کلی، در پی یافتن روش نمونه‌برداری هستیم که مستقل از حوزه تنک‌بودن سیگنال، بتوان آن را بازسازی کرد. برای بررسی، ابتدا از روش خطی ضرب ماتریس Φ (مشابه فصل قبل) آغاز می‌کنیم؛ اگر $\Phi_{m \times n}$ ماتریس ثابتی با $m \geq n$ باشد، تعداد نمونه‌ها بیشتر یا مساوی نمونه‌های اولیه

سیگنال است که مسلماً متناقض با تمام اهداف نمونه برداری فشرده است. در حالت $m < n$ نیز فضای پوچ Φ بعد $n - m > 0$ خواهد داشت. در نتیجه:

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\|_{\ell_2} = 1 : \Phi \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1-5)$$

فرض کنید V^\perp فضای حاصل از تمام بردارهای عمود بر \mathbf{v} در \mathbb{R}^n باشد؛ در نتیجه بعد V^\perp برابر با $n - 1$ است و می توان بردارهای متعامد یکه $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ را به عنوان پایه برای V^\perp اختیار کرد. بنابراین مجموعه بردارهای $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ برای \mathbb{R}^n تشکیل یک پایه متعامد یکه می دهند. اگر چنین تعریفی داشته باشیم:

$$\Psi = [\mathbf{v} \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_{n-1}] \Rightarrow \mathbf{v} = \Psi \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

در نتیجه، \mathbf{v} در حوزه متعامد یکه Ψ به صورت ۱-تنک بیان می شود اما $\Phi \cdot \mathbf{v} = 0$ ؛ بنابراین بردار ۱-تنکی وجود دارد که توسط نمونه های تولید شده با Φ قابل بازسازی نیست. در نتیجه، در هر نوع نمونه برداری خطی، بردارهای تنکی وجود دارند که قابل بازسازی نیستند. اکنون به نمونه برداری های غیر خطی می پردازیم؛ به عبارت دیگر، در پی توابع نمونه برداری f_1, \dots, f_m هستیم که از روی نمونه های تولید شده آن ها بتوان بردار تنک ورودی را بدست آورد:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(\mathbf{x}) = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3-5)$$

نکته مهمی که باید به آن اشاره کرد این است که \mathbb{R}^n و \mathbb{R} از نظر Cardinality با هم برابرند؛ یعنی تابع یک به یک و پوشای $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که تمامی بردارهای n تایی را به طور یک به یک با اعداد حقیقی، متناظر می کند. اگر از این تابع برای نمونه برداری استفاده شود، تمام n نمونه ی اولیه را حتی بدون نیاز به شرط تنک بودن، در یک نمونه نهایی، فشرده کرده ایم. با وجود قابلیت فشرده سازی حیرت انگیز این تابع، مشکلی اساسی وجود دارد: چنانچه نمونه نهایی چندی شود، تمام اطلاعات (تمام n نمونه ی اولیه) از بین می روند! بدیهی است که این قابلیت فشرده سازی بدون چندی کردن هیچ ارزش عملی ندارد. به بیان ساده تر، روشی مورد نظر است که پس از چندی کردن نمونه ها، هنوز قادر به بازسازی سیگنال اولیه (با احتساب خطایی محدود) باشد. در نتیجه، حتماً باید از شرط تنک بودن استفاده شود؛ یعنی بردار \mathbf{x} تنها برداری از \mathbb{R}^n نباشد که نمونه های $\mathbf{y}_{m \times 1}$

را تولید می‌کند بلکه تنها بردار تنک با این خاصیت باشد. نشان خواهیم داد که اگر هدف بازسازی سیگنال‌های k -تنک برای $k \geq 2$ باشد، حتی توابع غیر خطی (با قابلیت چندی کردن) نیز کارآمد نخواهند بود؛ اما برای حالت $k = 1$ چنین توابعی قابل ارائه است. فرض کنید $k \geq 2$ و (y_1, \dots, y_m) نمونه‌های بدست آمده از بردار $\mathbf{x}_n \times 1$ با توابع نمونه برداری (f_1, \dots, f_m) باشند، تعریف کنید:

$$S = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \leq i \leq m : f_i(\mathbf{z}) = y_i\} \quad (4-5)$$

به بیان دیگر، مجموعه S شامل تمام بردارهایی است که نمونه‌های تولید شده آن‌ها با نمونه‌های تولید شده از $\mathbf{x}_n \times 1$ برابرند و در نتیجه ابهام ما در بازسازی به انتخاب یکی از اعضای S محدود می‌شود. از آنجا که $\mathbf{x}_n \times 1 \in S$ پس $S \neq \emptyset$. از طرف دیگر مشابه استدلالی که در قبل به آن اشاره شد، $\mathbf{x}_n \times 1$ نمی‌تواند تنها عضو S باشد زیرا در این صورت بدون توجه به شرط تنک بودن، سیگنال $\mathbf{x}_n \times 1$ بازسازی می‌شود:

$$\exists \mathbf{v}_0 \in S, \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{x}_n \times 1 \quad (5-5)$$

تعریف کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle}{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle} \mathbf{v}_0 \quad (6-5)$$

که منظور از $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ ضرب داخلی دو بردار \mathbf{a}, \mathbf{b} است. فرض کنید $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_0$ بردارهای یکه در راستاهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0$ باشند. همچنین فرض کنید V^\perp فضای ساخته شده از تمام بردارهای عمود بر $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_0$ و $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2}\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای این فضا باشد:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle}{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{v}_0 \perp \mathbf{v}_1 &\Rightarrow \tilde{\mathbf{v}}_0 \perp \tilde{\mathbf{v}}_1 \end{aligned} \quad (7-5)$$

بنابراین، $\{\tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2}\}$ تشکیل یک پایه متعامد یکه برای \mathbb{R}^n می‌دهند. اگر ماتریس Ψ را از کنار هم قراردادن این بردارها بوجود آوریم $(\Psi = [\tilde{\mathbf{v}}_0 \ \tilde{\mathbf{v}}_1 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_{n-2}])$ ، ماتریس Ψ متعامد یکه خواهد بود و

بردارهای \mathbf{x} و \mathbf{v}_0 در این حوزه، نمایش تنک دارند:

$$\mathbf{v}_0 = \|\mathbf{v}_0\|_{\ell_r} \tilde{\mathbf{v}}_0 \Rightarrow \Psi \cdot \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_0\|_{\ell_r} \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle}{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle} \mathbf{v}_0 = \|\mathbf{v}_1\|_{\ell_r} \tilde{\mathbf{v}}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle \tilde{\mathbf{v}}_0 \Rightarrow \Psi \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle \\ \|\mathbf{v}_1\|_{\ell_r} \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} = \mathbf{x} \quad (۸-۵)$$

یعنی \mathbf{x} و \mathbf{v}_0 در این حوزه به ترتیب ۲-تنک و ۱-تنک هستند و از آنجا که $k \geq 2$ است، هر دو این پاسخها قابل قبولاند؛ بنابراین مسئله جواب یکتا ندارد. اگر $k = 1$ باشد، از آنجا که یکی از پاسخهای فوق ۲-تنک است، قابل قبول نیست و در نتیجه حالت $k = 1$ باید جداگانه بررسی شود. در واقع، برای $k = 1$ چنین توابعی وجود دارند که قبل از معرفی این توابع، ابتدا یک شرط لازم و کافی بیان می شود:

لم ۱-۵ مجموعه $S \subset \mathbb{R}^n$ قابلیت بازسازی یکتا برای سیگنالهای ۱-تنک را نسبت به حوزه تنک بودن دلخواه فراهم می کند اگر و فقط اگر :

$$\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in S : \circ < |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| < \|\mathbf{a}\|_{\ell_r} \|\mathbf{b}\|_{\ell_r} \quad (۹-۵)$$

قبل از اثبات لم فوق، باید به دو نکته اشاره کرد: اول این که قدر مطلق هر عدد حقیقی، نامنفی است؛ پس تنها نکته نابديهی در نامساوی سمت چپ، عدم تساوی با صفر است. به عبارت بهتر، برقراری نامساوی سمت چپ ایجاب می کند که هیچ دو عضوی از S بر یکدیگر عمود نباشند؛ نکته دوم این است که با استفاده از نامساوی کوشی، چنین داریم:

$$\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\|_{\ell_r} \|\mathbf{b}\|_{\ell_r} \quad (۱۰-۵)$$

و تساوی زمانی رخ می دهد که \mathbf{a} و \mathbf{b} در یک راستا باشند:

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\|_{\ell_r} \|\mathbf{b}\|_{\ell_r} \iff \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = c\mathbf{b} \quad (۱۱-۵)$$

بنابراین مجدداً، تنها نکته غیربديهی در نامساوی سمت راست (۹-۵)، عدم تساوی است؛ یعنی هیچ دو عضوی از S همراستا نیستند. اکنون نشان می دهیم اگر S شرایط لم فوق را ارضا کند، برای هر Ψ متعامد یکه

دلخواه، حداکثر یک عضو از S در حوزه Ψ نمایش ۱-تنک دارد. فرض کنید $a, b \in S$ و هر دوی a, b نمایش ۱-تنک در حوزه یک Ψ متعامد یکه داشته باشند؛ بنابراین هر کدام از a, b ضریبی از یکی از ستون‌های Ψ خواهند بود. اگر هر دو، ضریبی از یک ستون خاص در Ψ باشند، چون راستای هر دو با راستای این ستون از Ψ یکسان است، a, b همراستا خواهند بود که مغایر با شرط لم است. در صورتی هم که ستون‌های مربوط به a, b در Ψ متمایز باشند، به دلیل ساختار متعامد یکه Ψ ، این دو ستون بر هم عمودند و در نتیجه a, b متعامد خواهند بود که مشابهاً متناقض با شرط لم است. پس چنین a, b نمی‌توانند موجود باشند؛ در حوزه Ψ حداکثر یک عضو از S نمایش ۱-تنک دارد. اثبات عکس مطلب فوق (لازم بودن شرایط) نیز به صورت مشابهی قابل بیان است. حال باید توابعی معرفی کنیم که کلاس‌های هم‌ارزی خروجی‌های آنها مجموعه‌هایی با شرایط ذکر شده در لم باشد. نشان می‌دهیم که دو تابع نمونه‌برداری زیر چنین شرایطی را ایجاد می‌کنند:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n 3^{i-1} \text{sign}(x_i) \\ f_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_{n \times 1}\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^n |x_i| \end{cases} \quad (12-5)$$

که در آن:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \quad (13-5)$$

در واقع تابع f_1 تنها بیانگر علامت درایه‌های بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ است (به تعبیری بسط مبنای ۳ تولید شده است). می‌توان به جای تابع f_1 از n تا تابع مجزا برای علامت هر درایه استفاده کرد. از آنجا که بازه تغییرات f_1 بین $-\frac{3^n-1}{2}, \frac{3^n-1}{2}$ محدود است، برای چندی کردن خروجی این تابع، حداکثر $\lceil n \log_3 3 \rceil$ بیت مورد نیاز است. قبل از بررسی اثر چندی کردن خروجی تابع f_1 ، ابتدا نشان می‌دهیم که شرایط لم صادق است. اگر $f_1(\mathbf{x}) = 0$ باشد، تنها حالت قابل قبول $\mathbf{x}_{n \times 1} = 0$ است (با توجه به علامت درایه‌ها). بنابراین، در چنین حالتی حتی بدون نیاز به خروجی تابع f_2 ، ورودی نمونه‌برداری به طور یکتا بازسازی می‌شود. اگر برای دو بردار a, b چنین داشته باشیم: $f_1(a) = f_2(b) \neq 0$ ، در این صورت علامت درایه‌های متناظر a, b مشابه است و در بین درایه‌های هر کدام، حداقل یک عدد ناصفر وجود دارد:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = [a_1 \dots a_n]^T \\ \mathbf{b} = [b_1 \dots b_n]^T \end{cases} \quad f_1(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{b}) \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n : \text{sign}(a_i) = \text{sign}(b_i)$$

$$\Rightarrow a_i b_i \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0 \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq 0 \quad (14-5)$$

و تساوی هم اتفاق نمی افتد زیرا دست کم برای یک مقدار i حاصل، $a_i b_i$ ناصفر خواهد بود:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0 \quad (15-5)$$

به بیان دیگر، اگر $f_1(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{b})$ ، دو بردار \mathbf{a}, \mathbf{b} نمی توانند عمود باشند (به جز در حالت صفر). بنابراین از بین راستاهای ۱-تنکی که ماتریس متعامد یک دلخواه Ψ ایجاد می کند، حداکثر یکی می تواند نمونه حاصل از f_1 را تولید کند. تنها نکته باقی مانده این است که نمونه حاصل از f_2 ایجاب می کند که در هر راستای دلخواه، حداکثر یک بردار، نمونه های حاصل از f_1 و f_2 را ایجاد کند. اگر \mathbf{a}, \mathbf{b} همراستا باشند، چنین است:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = c\mathbf{b} \Rightarrow f_2(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|_{\ell_1} = |c| \|\mathbf{b}\|_{\ell_1} = |c| f_2(\mathbf{b}) \quad (16-5)$$

پس اگر $f_2(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{b})$ ، باید $|c| = 1$ باشد. حالت $c = 1$ حالت مورد نظر است و تناقضی ایجاد نمی کند اما حالت $c = -1$ قابل قبول نیست:

$$c = -1 \Rightarrow \mathbf{a} = -\mathbf{b} \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\|\mathbf{b}\|_{\ell_1}^2 \quad (17-5)$$

که با شرط تولید شده از $f_1(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{b})$ در تضاد است. بنابراین ثابت شد که توسط نمونه برداری به کمک دو تابع f_1 و f_2 معرفی شده، مستقل از انتخاب حوزه تنک بودن (ماتریس Ψ)، حداکثر یک بردار ۱-تنک بازسازی می شود. همان طور که مشاهده شد، راستای بردار ۱-تنک توسط نمونه حاصل از f_1 تعیین می شود و در نتیجه با چندی کردن خروجی تابع f_2 ، راستای سیگنال بازسازی شده تغییر نمی کند! تنها تفاوتی که بوجود می آید در اندازه بردار بازسازی شده است. به سهولت می توان مشاهده کرد که خطای تولید شده در اندازه بردار، به طور خطی متناسب با خطای ناشی از چندی کردن نمونه حاصل از f_2 است. پس، خطاهای کوچک ورودی، به خطاهای کوچک خروجی تبدیل می شوند. اگر به جای بردارهای \mathbb{R}^n ، بردارهای \mathbb{C}^n مورد نظر باشند، به جای دو تابع فوق باید از سه تابع زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{I}^{(i-1)} \text{sign}(\Re x_i) + \mathfrak{I}^{2i-1} \text{sign}(\Im x_i) \\ f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |x_i| \\ f_3(\mathbf{x}) = \sum_{x_i \neq 0} \frac{\text{msign}(\Re x_i) \cdot \Im x_i}{|\Re x_i| + |\Im x_i|} \end{cases} \quad (18-5)$$

که در آن:

$$\text{msign}(a) = \begin{cases} 1 & a \geq 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \quad (19-5)$$

دو تابع اول تقریباً مشابه توابع قبلی هستند و نقش مشابهی ایفا می‌کنند؛ تابع سوم برای بازیابی فاز است. برای پرهیز از طولانی شدن متن، حالت \mathbb{C}^n را اثبات نمی‌کنیم.

۳-۵ نمونه برداری غیرتصادفی برای حوزه تنک بودن معلوم

از ابتدایی‌ترین مفروضات نمونه برداری فشرده، خطی بودن نحوه نمونه برداری است. خطی بودن، مزایای بسیاری از جمله قابلیت تحلیل ساده و تقویت نکردن نویز جمعی را در بر دارد، اما آیا می‌توان با ورود به روش‌های نمونه برداری غیرخطی مزیتی بدست آورد؟ در این بخش نشان می‌دهیم که با استفاده از روش‌های غیرخطی می‌توان تعداد نمونه‌های لازم برای بازسازی در حالت بدون نویز را تا $2k-1$ پایین آورد که بسیار پایین‌تر از نرخ لازم در روش‌های خطی ذکر شده است. همچنین، نحوه بازسازی با پیچیدگی بسیار کمتری صورت می‌گیرد و تضمین بازسازی سیگنال اولیه به صورت قطعی است و نه به صورت احتمالاتی. در مقابل، روش‌های غیرخطی نسبت به نویز جمعی پایداری کمتری دارند و همچنین پیچیدگی نمونه برداری را افزایش می‌دهند.

فرض کنید $\mathbf{x}_{n \times 1}$ یک بردار k -تنک باشد. می‌خواهیم با نمونه برداری غیرخطی از $\mathbf{x}_{n \times 1}$ با تعداد نمونه کم ($2k-1$) آن را بازسازی کنیم (نتایج را می‌توان به حالتی که حوزه تنک بودن Ψ مطرح است نیز تعمیم داد). فرض کنید a_1, \dots, a_n اعداد حقیقی دلخواه باشند؛ نمونه‌های غیرخطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \\ y_2 &= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 \\ &\vdots \\ y_{2k-1} &= a_1 x_1^{2k-1} + a_2 x_2^{2k-1} + \dots + a_n x_n^{2k-1} \end{cases} \quad (20-5)$$

(با وجود شباهت ظاهری به کدینگ RS¹ و یا ماتریس‌های واندروموند، دقت کنید که خود مجهولات به توان می‌رسند و نه ضرایب؛ بنابراین، نمونه برداری غیرخطی است). نشان می‌دهیم که هر حالت k -تنک در بین بردارهای $\mathbf{x}_{n \times 1}$ را می‌توان از روی نمونه‌های $\{y_1, \dots, y_{2k-1}\}$ استخراج کرد. ابتدا دقت کنید که در روابط فوق حداکثر k تا از جمله‌های x_i ناصفر هستند، مثلاً $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$. بنابراین دنباله $\{y_i\}_{i=0}^{2k-1}$ در یک رابطه

¹Reed-Solomon

بازگشتی 2 خطی و همگن از مرتبه k صدق می کند:

$$\exists c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} : y_i + \sum_{j=1}^k c_j y_{i-j} = 0 \quad (k \leq i \leq 2k-1) \quad (21-5)$$

در واقع x_i های ناصفر، قطب های تبدیل \mathcal{Z} دنباله y_i خواهند بود (اگر دنباله را بطور نامتناهی می ساختیم). برای یافتن x_{i_j} ها، اولین گام، یافتن ضرایب دنباله بازگشتی y_i است (c_i ها). برای این منظور از k -معادله و k -مجهول زیر استفاده می کنیم (مقدار $y_0 = \sum_{i=1}^n a_i$ از قبل معلوم است):

$$\begin{bmatrix} y_{k-1} & y_{k-2} & \dots & y_0 \\ y_k & y_{k-1} & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2k-2} & y_{2k-3} & \dots & y_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_k \\ -y_{k+1} \\ \vdots \\ -y_{2k-1} \end{bmatrix} \quad (22-5)$$

بنابراین با حل دستگاه فوق، ضرایب c_i بدست می آیند (حالتی که این دستگاه تکین باشد، در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت). اکنون همانطور که گفته شد، مقادیر ناصفر بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ (x_{i_j} ها) ریشه چندجمله ای با ضرایب c_i هستند:

$$q(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + c_2 z^{k-2} + \dots + c_k$$

$$\Rightarrow q(x_{i_1}) = q(x_{i_2}) = \dots = q(x_{i_k}) = 0 \quad (23-5)$$

بنابراین با بدست آوردن ریشه های چندجمله ای $q(z)$ (پس از بدست آمدن c_i ها) مقادیر ناصفر بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ حاصل می شوند (روش فوق شباهت زیادی به روش ELP در یافتن مکان های خطا در کدهای حقیقی [۷۱] و یافتن زمان های ناپیوستگی به کمک Annihilating Filter در مبحث نمونه برداری از سیگنال های با نرخ نوآوری محدود دارد [۹۳]). دقت کنید که در این روش، ابتدا مقادیر ناصفر بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ محاسبه می شوند و سپس در پی مکان این مقادیر در بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ خواهیم بود (در روش های رایج نمونه برداری فشرده، اول مکان ها تعیین می شوند و بعد مقادیر).

پس از بدست آوردن قطب های تبدیل \mathcal{Z} دنباله y_i (x_{i_j} ها)، به راحتی می توان به کمک y_0, \dots, y_{k-1} که همانند شرایط اولیه برای دنباله بازگشتی است، ضریب ثابت هر قطب را هم بدست آورد (d_j):

$$y_l = \sum_{j=1}^k d_j x_{i_j}^l, \quad 0 \leq l \leq 2k-1 \quad (24-5)$$

از طرفی این ضرایب (d_j ها) که از حل دنباله بازگشتی حاصل شده‌اند باید همان a_i های اولیه باشند که هنگام نمونه برداری انتخاب شده‌اند. پس، از تطابق d_j ها با a_i ها می‌توانیم تشخیص دهیم هر کدام از ریشه‌های بدست آمده مربوط به کدام مکان در بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ بوده‌اند. برای جلوگیری از ابهام در این تطابق، باید a_i ها متمایز باشند (در صورت برابری a_i و a_j ، معلوم نیست که x_i ناصفر بوده است یا x_j). بنابراین، در حالتی که دستگاه خطی مطرح شده تکین نباشد، جواب k -تنک به طور یکتا و قطعی بدست خواهد آمد.

اکنون حالتی مطرح می‌شود که دستگاه خطی تکین باشد:

$$\det \begin{bmatrix} y_{k-1} & y_{k-2} & \dots & y_0 \\ y_k & y_{k-1} & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2k-2} & y_{2k-3} & \dots & y_{k-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (25-5)$$

این امر بدین معناست که $\{y_i\}$ ها در دنباله بازگشتی کوچکتری (نسبت به طول مفروض k) صدق می‌کنند. این اتفاق دو منشاء می‌تواند داشته باشد: اول این که تعداد مولفه‌های غیر صفر بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ کمتر از k بوده و دیگری این که تعدادی از مولفه‌های غیر صفر با هم برابر بوده‌اند (در صورت برابری دو مقدار، ضرایب قطب‌ها با هم جمع می‌شوند و در نهایت به صورت یک قطب جلوه می‌کنند). مشابه قبل، ابتدا باید مقادیر ناصفر بدست آیند و سپس مکان‌ها و تکراری بودن و نبودن آن‌ها تعیین شود. در نتیجه، به یک دنباله بازگشتی مناسب نیاز است. برای این امر باید ابعاد دستگاه خطی را که از ابتدا k فرض شده بود، آنقدر کاهش دهیم تا به یک ماتریس غیر تکین دست یابیم:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} y_i & y_{i-1} & \dots & y_0 \\ y_{i+1} & y_i & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2i} & y_{2i-2} & \dots & y_i \end{bmatrix}, \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad (26-5)$$

به بیان بهتر، باید بزرگترین i ای را بیابیم که $\det \mathbf{A}_i \neq 0$. این i بیانگر تعداد مقادیر ناصفر متفاوت بین درایه‌های بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ است. پس از بدست آمدن دنباله بازگشتی مرتبه i و متعاقباً مقادیر ناصفر بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ به کمک y_0, \dots, y_i (شرایط اولیه دنباله بازگشتی)، ضرایب قطب‌ها (d_j ها) حاصل می‌شوند. مشابهاً، هر d_j برابر با یک یا زیرجمعی از a_j هاست (هنگامی که چند درایه‌ی ناصفر از $\mathbf{x}_{n \times 1}$ برابر باشند، ضرایب a_j آن‌ها با هم جمع می‌شود تا d_j نهایی حاصل شود). اکنون برای تشخیص بدون ابهام مکان‌ها و تکرارها، باید a_j ها به گونه‌ای باشند که هیچ دو زیرجمعی از آن‌ها برابر نشود. عکس این مطلب نیز صادق است؛ اگر هیچ دو زیرجمعی از a_j ها با

یکدیگر برابر نباشند، بطور یکتا می توان از روی d_j ها مکانها و تکرارهای اولیه را تعیین کرد. یک انتخاب ساده برای a_j ها، توانهای ۲ است:

$$1 \leq j \leq n: a_j = 2^j \quad (27-5)$$

پس با انتخاب مناسب a_j ها، تمام بردارهای k -تنک اولیه به طور یقینی (در حالت بدون نویز) قابل بازسازی هستند.

اگر f تابعی یک به یک با $f(0) = 0$ باشد، در نمونه‌های غیرخطی تولید شده در (۵-۲۰) می توان به جای x_i از $f(x_i)$ استفاده کرد. در این صورت در روند بازسازی نیز به جای x_i ، $f(x_i)$ به دست می آید و از آنجا که f یک به یک است، می توان به x_i دست پیدا کرد. شرط $f(0) = 0$ از این رو اهمیت دارد که تنک بودن بردار $[x_1, \dots, x_n]$ کماکان در $[f(x_1), \dots, f(x_n)]$ صادق است و بنابراین نتایج به دست آمده هنوز معتبر هستند. استفاده از تابع f در محدود کردن دامنه تغییرات نمونه‌ها بسیار موثر است. فرض کنید دامنه تغییرات هر x_i بین $[-2, 2]$ باشد و بردار $[x_1, \dots, x_n]$ شامل k درایه ناصفر باشد، در روش نمونه برداری غیرخطی توانهای این مقادیر تا مرتبه $2k-1$ باید محاسبه شوند که محدوده تغییرات را به $[-2^{2k-1}, 2^{2k-1}]$ افزایش می دهد. اکنون اگر تابع $f(x) = e^{ix}$ مورد استفاده قرار گیرد، محدوده تغییرات $f^i(x)$ برای هر i ثابت است. از طرفی این تابع برای محدوده مورد نظر x_i یک به یک است. پس با استفاده از تابع f مناسب می توان مشکل محدوده تغییرات را حل کرد. به عنوان یک مثال غیرخطی با نمونه‌های حقیقی، نمونه‌های زیر را در نظر بگیرید (تغییرات x_i محدود به $[-M, M]$ است):

$$\begin{cases} y_1 &= a_1 \sin\left(\frac{\pi x_1}{2M}\right) + a_2 \sin\left(\frac{\pi x_2}{2M}\right) + \dots + a_n \sin\left(\frac{\pi x_n}{2M}\right) \\ y_2 &= a_1 \sin\left(2\frac{\pi x_1}{2M}\right) + a_2 \sin\left(2\frac{\pi x_2}{2M}\right) + \dots + a_n \sin\left(2\frac{\pi x_n}{2M}\right) \\ &\vdots \\ y_{2k-1} &= a_1 \sin\left((2k-1)\frac{\pi x_1}{2M}\right) + a_2 \sin\left((2k-1)\frac{\pi x_2}{2M}\right) + \dots + a_n \sin\left((2k-1)\frac{\pi x_n}{2M}\right) \end{cases} \quad (28-5)$$

از آنجا که $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ هر تابع سینوسی در نمونه‌های فوق را می توان به دو تابع نمایی مختلط تجزیه کرد، این موضوع نشان می دهد که دنباله $\{y_l\}_{l=1}^{\infty}$ در یک رابطه بازگشتی مرتبه $2k$ صدق می کند و در نتیجه اگر روشی مشابه قبل استفاده شود، به $4k-1$ نمونه احتیاج است. نشان می دهیم در این حالت با $2k$ نمونه می توان بردار k -تنک را بازیابی کرد. با تعریف چند جمله‌ای $q(z)$ به صورت قبل داریم:

$$\forall 1 \leq l \leq k: q(z) = \sum_{i=0}^{2k} c_i z^i = \prod_{l=1}^k (z - e^{j\frac{\pi x_{i_l}}{2M}})(z - e^{-j\frac{\pi x_{i_l}}{2M}}) = \prod_{l=1}^k (z^2 - 2z \cos \frac{\pi x_{i_l}}{2M} + 1) \quad (29-5)$$

در نتیجه $1 = c_{2k} = c_0$ و $q(z)$ یک چندجمله‌ای متقارن است:

$$c_i = c_{2k-i} \quad (30-5)$$

پس

$$\forall l: 0 = \sum_{i=0}^{2k} c_i y_{l-i} = c_k y_{l-k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i (y_{l-i} + y_{l-2k+i}) \quad (31-5)$$

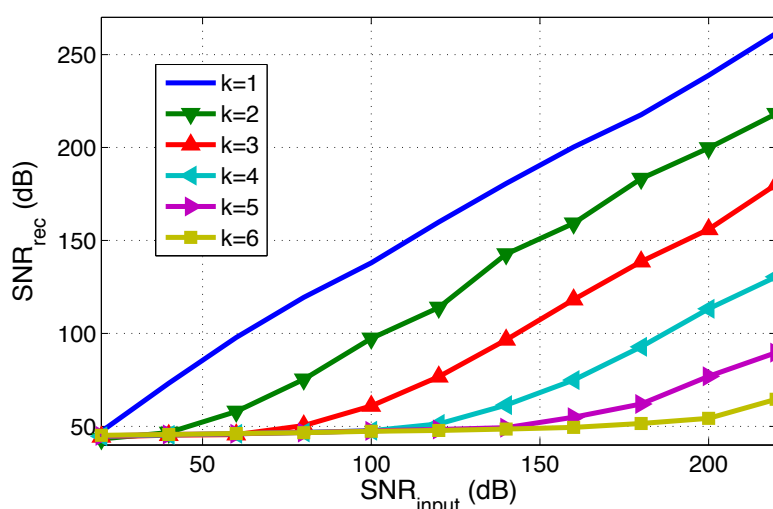
پس برای به دست آوردن c_i ها می‌توانیم از حل دستگاه زیر بهره جوییم:

$$\begin{bmatrix} y_k + y_{2-k} & y_{k-1} + y_{3-k} & \dots & y_2 + y_0 & y_1 \\ y_{k+1} + y_{3-k} & y_k + y_{4-k} & \dots & y_3 + y_1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y_{2k-1} + y_1 & y_{2k-2} + y_2 & \dots & y_{k+1} + y_{k-1} & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y_{k+1} + y_{1-k}) \\ -(y_{k+2} + y_{2-k}) \\ \vdots \\ -(y_{2k} + y_0) \end{bmatrix} \quad (32-5)$$

در اینجا نیز $y_0 = 0$ از پیش معلوم است و همچنین با توجه به تعریف نمونه‌ها داریم $y_l = -y_{-l}$ ؛ در نتیجه با داشتن y_1, \dots, y_{k-1} ، مقادیر y_{-1}, \dots, y_{1-k} معلوم خواهند بود. پس برای حل دستگاه (32-5) تنها $2k$ نمونه از y_i ها لازم است. با به دست آمدن ضرایب c_1, \dots, c_k ، مشابه قبل چندجمله‌ای $q(z)$ را تشکیل می‌دهیم و پس از به دست آوردن ریشه‌های آن، مقادیر ناصفر بردار $[x_1, \dots, x_n]$ را آشکار می‌کنیم و با کمک ضرایب a_i و دنباله بازگشتی $\{y_l\}_l$ ، مکان این مقادیر نیز مشخص می‌شوند.

اهمیت k -تنک بودن بردار x در نمونه برداری غیر خطی بررسی شده تنها در وجود k مقدار غیر صفر مختلف در بین مقادیر بردار است؛ به عبارت بهتر، نکته اصلی تعداد مقادیر ناصفر نیست، بلکه تنوع در مقادیر ناصفر است. اگر تمامی مقادیر بردار x ناصفر باشند اما تنها k مقدار مختلف در بین درایه‌های آن یافت شود، دنباله $\{y_l\}_l$ همچنان در یک دنباله بازگشتی درجه k صدق خواهد کرد و مطابق مطالب بیان شده، این مقادیر و مکان‌های آن‌ها (در صورت مناسب انتخاب شدن ضرایب a_i) از روی نمونه‌ها قابل محاسبه‌اند. بنابراین، نمونه برداری غیر خطی نه تنها تعداد نمونه لازم و پیچیدگی محاسباتی عمل بازسازی را کاهش می‌دهد، بلکه بازسازی کامل را برای مجموعه بردارهای k -سطحی که تعمیمی از بردارهای k -تنک هستند تضمین می‌کند.

همان‌طور که در ابتدا ذکر شد، در خصوص نویز، به دلیل استفاده از عملگرهای غیر خطی، تحلیل عملکرد بسیار پیچیده است؛ البته در نویزهای کم، افت چندانی مشاهده نمی‌شود و در مورد عملکرد، می‌توان انتظار مشابهی نسبت به Annihilating Filter [۹۳] داشت.



شکل ۵-۱: کیفیت سیگنال بازسازی شده توسط نمونه‌های غیر خطی برای مرتبه‌های متفاوت تنک بودن.

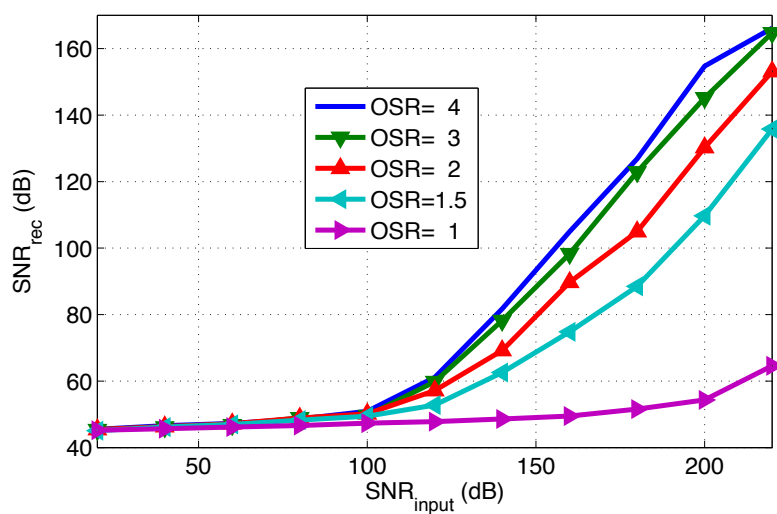
۴-۵ نتایج شبیه‌سازی

عملکرد نمونه برداری غیر خطی را با روش تابع سینوسی که مشکل محدوده تغییرات ندارد، بررسی می‌کنیم. برای این منظور بردارهای k -تنک با طول $n = 50$ در نظر گرفته‌ایم که مکان‌های ناصفر به صورت تصادفی و هم‌احتمال از بین $\binom{50}{k}$ حالت مختلف انتخاب می‌شوند. همچنین مقادیر غیر صفر با توزیع یکنواخت در $[-2, 2]$ اختیار می‌شوند. از آنجا که احتمال برابری دو مقدار ناصفر در بردار بسیار ناچیز است، نیازی به انتخاب $a_i = 2^i$ نیست و برای این منظور از a_i ‌های تصادفی با توزیع گوسی و میانگین صفر استفاده کرده‌ایم. برای بررسی اثر نویز، نمونه‌های غیر خطی تحت تاثیر نویز جمعی گوسی با واریانس‌های مشخص قرار گرفته‌اند تا SNR‌های متفاوتی ایجاد شود.

شکل ۵-۱ کیفیت سیگنال بازسازی شده (SNR) را بر حسب SNR ورودی برای $k = 1, \dots, 6$ نشان می‌دهد. برای به دست آوردن این نمودار، برای هر k ، از $2k$ نمونه استفاده شده است و نتایج برای ۵۰۰ شبیه‌سازی متفاوت میانگین‌گیری شده‌اند. شکل ۵-۱ نشان می‌دهد که با افزایش k ، حساسیت نسبت به نویز افزایش می‌یابد و افت کیفیت مشهودتر می‌شود.

هنگامی که بیشتر از $2k$ نمونه از y_i ها در دسترس باشد، معادله (۵-۳۲) تبدیل به یک دستگاه فرا-معین^۳

^۳Over-determined



شکل ۵-۲: کیفیت سیگنال بازسازی شده توسط نمونه‌های غیر خطی به ازای $k = 6$ در OSRهای متفاوت.

می‌شود و در نتیجه تاثیر نویز ورودی کاهش می‌یابد. در شکل ۵-۲ این اثر را برای $k = 6$ بررسی کرده‌ایم. در این شکل منظور از OSR نسبت تعداد نمونه در دسترس به حداقل مورد نیاز ($2k$) است. مثلاً، $OSR = 1/5$ به معنای استفاده از $3k$ نمونه است.