میان ترم درس موج

مدت زمان امتحان: ۹۰ دقیقه

۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۷

بخش اول: در این بخش به سوالات به صورت شفاهی و در نهایت در دو جمله پاسخ سوال را بدهید. برای این بخش نیازی به محاسبه نیست.

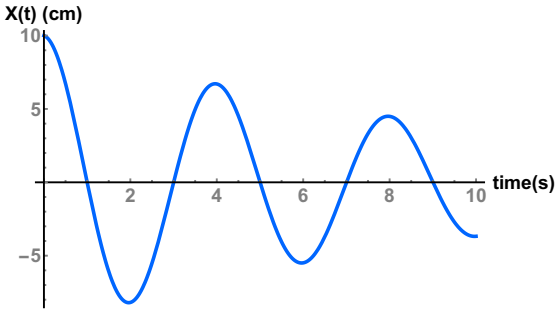
سوال۱. برای یک نوسانگر خطی، تغییرات سرعت اولیه، چگونه بر فرکانس نوسان تاثیر می گذارد؟ (۱۰ نمره)
پاسخ: تغییر نمی کند و مستقل است.
سوال ۲. رژیم هدررفت بحرانی $(critically-damped)$ به چه رژیمی گفته می شود. (۱۰ نمره)
پاسخ: رژیمی که نرخ هدر رفت انرژی دو برابر فرکانس طبیعی سیستم باشد. (چنانچه از تعریفی متفاوت برای نرخ هدر رفت استفاده کرده اید، باید تعریف خود را مشخص کنید، در غیر این صورت، بنا برا نوتاسیون کتاب گذاشته خواهد شد.)
سوال ۳. مد نرمال چیست؟ (۱۰ نمره) پاسخ: چیدمان و حالتی از سیستم که تمام اجزا آن با یک فرکانس نوسان کنند.

بخش دوم: در این بخش سوالات به انجام محاسبه نیاز دارند. در هر سوال آنچه به عنوان راه حل در ذهن دارید توصیح دهید و مراحل را به صورت شفاف مشخص کنید. چنانچه بخشی از پاسخ سوال را نمی دانید، سایر بخش ها را بدون پاسخ نگذارید.

سوال ۴. با نیرویی به اندازه ۵ نیوتن جرمی که به فنر متصل است، به اندازه ۱۰ سانتی متر از محل تعادل آن جابجا می کنیم و در زمان صفر آنرا با سرعت صفر رها می کنیم. نمودار نوسانات از محل تعادل در شکل زیر نمایش داده شده است. بر اساس نمودار ۱ ،
الف: جرم (۱۰ نمره) پاسخ: ابتدا ثابت فنر را از روی جابجایی اولیه و نیروی لازم برای آن محاسبه می کنیم:

$$k = |\frac{F}{\Delta x}| = \frac{۵N}{۰/۱m} = ۵۰N/m$$

از نمودار می توان فرکانس سیستم را بدست آورد. پس از $۴s$ سیستم به نقطه بیشینه باز



شکل ۱: سوال ۴: نمودار مکان جرم متصل به فنر بر حسب زمان

می گردد، بنابراین

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{\pi}{۲}$$

.

همچنین می دانیم فرکانس طبیعی فنر از رابطه $\omega \approx \sqrt{\frac{k}{m}}$ داده می شود. بنابراین جرم باید

$$m = \frac{k}{\omega^۲} = \frac{۵۰ * ۴}{\pi^۲} = ۲۰/۲۶Kg \approx ۲۰Kg$$

ب. ضریب $Q - factor$ (هدر رفت انرژی زمانی که نیروی اصطکاک به صورت $-m\Gamma v$ باشد)، (۱۵ نمره)
بدست آورید. (پاسخ به صورت تقریبی و در نزدیکی جواب اصلی هم قابل قبول است)
پاسخ: ابتدا نرخ هدر رفت انرژی را محاسبه می کنیم. از نمودار می توان دید که بعد از دو تناوب ($t = ۸s$) دامنه نوسان تقریبا نصف شده است. از آنجایی که دامنه نوسان با $e^{-\Gamma t/۲}$ کم می شود، بدست می آوریم:

$$e^{-\Gamma t/۲}|_{t=۸} = ۱/۲ => \Gamma = \frac{۱}{۴}\log ۲ \approx ۰/۱۷s^{-۱}$$

ضریب Q از تقسیم فرکانس به نرخ هدر رفت انرژی بدست می آید:

$$Q = \frac{\omega}{\Gamma} = \frac{\pi}{۲ * ۰/۱۷} \approx ۹/۲۳.$$

سوال ۵. مدار شکل ۲ـa را در نظر بگیرید. در این مدار منبع جریان، ولتاژ تناوبی به شکل $V = Cos(\omega_D t)$ اعمال می کند.
الف. معادله حرکت را بازنویسی کنید و جریان را برای این سیستم بدست آورید.
(راهنمایی: معادلات ولتاژ برای اجزای مدار به شکل زیر می باشد:

$$V_R = RI$$

$$\begin{aligned} V_L &= L\dot{I} \\ V_C &= \frac{Q}{C} \end{aligned}$$

آسان تر است ابتدا بر حسب بار معادله را بدست آورید و سپس جریان را برحسب بار محاسبه کنید.) (۲۰ نمره)

پاسخ: جمع ولتاژ در یک دور باید برابر باشد با ولتاژ منبع تغذیه که نتیجه می دهد:

$$V_L + V_R + V_C = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = Cos(\omega_D t)$$

برای راحتی ولتاژ منبع تغذیه را به صورت قسمت حقیقی از $e^{-i\omega t}$ در نظر می گیرم. حالت های پایا سیستم به صورت زیر در می آیند

$$q(t) = Q_\circ e^{-i\omega t}$$

که $Q(t) = Re(q)$ و $Q_\circ$ می تواند مختلط باشد. از جایگذاری در معادله دیفرانسیل بالا بدست می آوریم

$$Q_\circ(-L\omega_D^2 - i\omega_D\Gamma + \frac{1}{C}) = 1.$$

طرفین را بر L تقسیم می کنیم و از تعریف $\Gamma = R/L$ ورابطه فرکانس طبیعی یعنی $\omega_\circ^2 = \frac{1}{LC}$ معادله را به این شکل بازنویسی می کنیم:

$$Q_\circ = \frac{1}{L}\frac{1}{(\omega_\circ^2 - \omega_D^2) - i\Gamma\omega_D} = \frac{1}{L}\frac{(\omega_\circ^2 - \omega_D^2) + i\Gamma\omega_D}{(\omega_\circ^2 - \omega_D^2)^2 + (\Gamma\omega_D)^2}$$

. از اینجا می توان به سادگی قسمت حقیقی و مهومی $Q_\circ$ را دید و بنابراین

$$Q(t) = Re(q(t)) = \frac{1}{L}\frac{(\omega_\circ^2 - \omega_D^2)\cos(\omega_D t)}{(\omega_\circ^2 - \omega_D^2)^2 + (\Gamma\omega_D)^2} + \frac{1}{L}\frac{\Gamma\omega_D \sin(\omega_D t)}{(\omega_\circ^2 - \omega_D^2)^2 + (\Gamma\omega_D)^2} = A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)$$

در نهایت جریان از مشتق بار بدست می آید:

$$I(t) = \omega_D(-A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t))$$

ب. نمودار توان برحسب فرکانس ω_D را در شکل ۲ـb می توانید ببینید. بر اساس این نمودار، مقاومت، ضریب خازن و القاگر را بدست آورید. (راهنمایی: توان برای مدار از حاصلضرب ولتاژ منبع در جریان بدست می آید). (۲۵ نمره)

پاسخ: می توانید در این بخش از نگاشت بین نوسانگر های مکانیکی و مداری استفاده کنید. راه حل کلی تر به این شکل خواهد بود.

ابتدا توان را از حاصلضرب ولتاژ منبع و جریان مدار بدست می آوریم

$$P(t) = V(t)I(t) = \omega_D(-A\sin(\omega_D t)\cos(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)^2)$$

از متوسط گیری این معادله بدست می آوریم:

$$P_{avg}(\omega_D) = \omega_D B/۲$$

بیشینه این تابع در $\omega_D = \omega_\circ$ رخ می دهد و برابر است با:

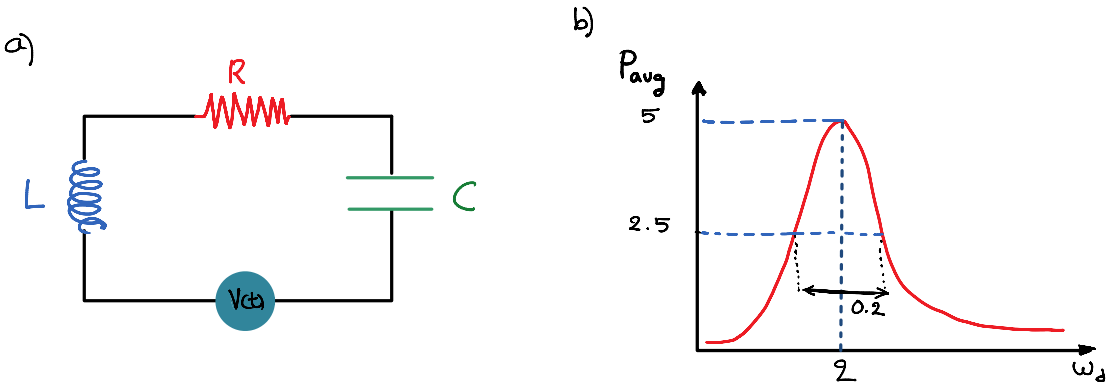
$$\max P_{avg} = \frac{۱}{۲L\Gamma} = \frac{۱}{۲R}$$

. از نمودار می توان دید که مقدار بیشینه برابر است با ۵ که مقدار مقاوت را می دهد

$$R = \circ/۱\Omega$$

همچنین می دانیم (می توان بدست آورد) که فاصله نقاط نصفه بیشینه برابر است با $\Gamma = R/L$ که از شکل برابر ۰/۲ می باشد و بنابراین $L = \frac{R}{\Gamma} = \frac{\circ/۱}{\circ/۲} = \circ/۵H$ در نهایت برای محاسبه ضریب خازن، از این استفاده می کنیم که محل بیشینه توان باید در فرکانس طبیعی مدار باشد که برابر است با ۲ هرتز. بنابراین خواهیم داشت:

$$C = \frac{۱}{L\omega_\circ^۲} = \frac{۱}{\circ/۵ * ۴} = \circ/۵F$$



شکل ۲: سوال ۵: الف: یک مدار متشکل از القاگر، مقاومت و خازن ب: نمودار توان متوسط بر حسب فرکانس منبع ولتاژ