فصل

# ۱۰

# راه‌حل‌ها

**۱.۱** می‌دانیم ارتفاع درخت بازگشت $\log_{\frac{۴}{۳}} n$ است و در هر مرحله مقدار محاسبه‌شده در هر سطح درخت برابر است با:

$$T(n) \leq n^{۲} \sum_{i=۰}^{\log_{\frac{۴}{۳}}} (\frac{۱۰}{۱۶})^{i} \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{۲})$$

پس $T(n) = \Theta(n^{۲} \lg n)$ جواب این مسئله است.

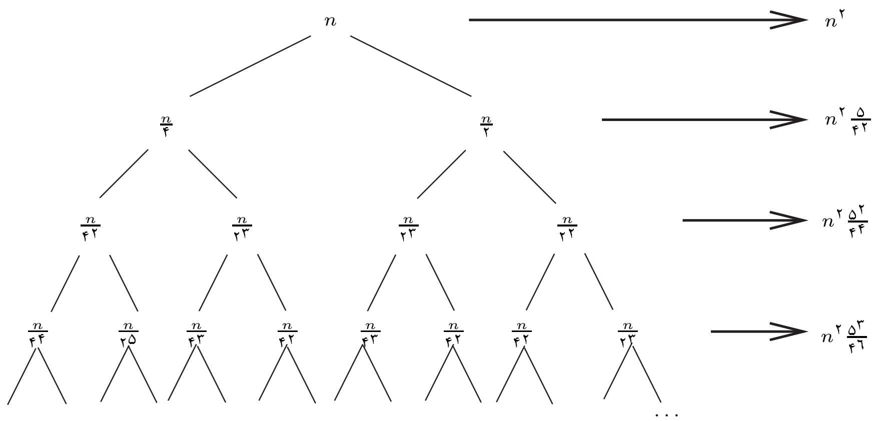
**۲.۱** اضافه کردن یک مقدار ثابت (برای نمونه ۱۷) به رابطه‌ی $T(n) = ۲T(\lfloor n/۲ \rfloor) + n$ تأثیری در مرتبه‌ی پاسخ ($\mathcal{O}$) ندارد. بنابراین پاسخ همان $\mathcal{O}(n \lg n)$ است.

**۳.۱** با بسط گزینه‌ی اول می‌بینیم که جواب آن $\Theta(۲^{n/۲})$ است که چندجمله‌ای نیست.

از سوی دیگر، گزینه‌های ۲ و ۳ طبق قضیه‌ی اصلی به جواب چندجمله‌ای (به‌ترتیب $\Theta(n)$ و $\Theta(n^{۲})$) می‌رسند. هم‌چنین برای گزینه‌ی چهارم نیز داریم $\sum_{i=۱}^{n} i^{۲} = \Theta(n^{۳})$ که چندجمله‌ای است.

**۴.۱** فرض می‌کنیم $T(k) \leq c \lg n$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(\sqrt[۳]{n}) + \lg n = T(n^{\frac{۱}{۳}}) + \lg n \\
&\leq \lg n + c \lg n^{\frac{۱}{۳}} + c \lg n^{(\frac{۱}{۳})^{۲}} + c \lg n^{(\frac{۱}{۳})^{۳}} + \ldots \\
&\leq \lg n + c[\frac{۱}{۳} + (\frac{۱}{۳})^{۲} + \ldots] \lg n \leq (۱ - c/۲) \lg n \leq c \lg n \;\; \text{for} \;\; c \geq ۳/۲ \\
\Rightarrow T(n) &\leq c(\lg n).
\end{aligned}$$




**شکل ۱.۱۰** درخت بازگشت رابطه‌ی $T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{2}) + n^2$ (مسئله‌ی ۵.۱).

**۵.۱** درخت بازگشت این مسئله مطابق شکل ۱.۱۰ خواهد شود. بنابراین

$$T(n) \le n^2 \sum_{i=0}^{\lg n} \frac{5^i}{(4^2)^2} \le c_1 n^2.$$

از سوی دیگر به‌سادگی می‌توان نشان داد که $T(n) \ge c_2 n^2$. پس $T(n) = \Theta(n^2)$.

**۶.۱** چنان‌چه در درخت بازگشت شکل ۲.۱۰ مشاهده می‌شود، جمع هزینه‌های گره‌های عمق $i$ از درخت برابر با $c(\frac{9}{10})^i n$ است. ارتفاع درخت هم برابر $\log_{\frac{10}{7}} n$ است؛ چون در ارتفاع $h$ مقدار برگ سمت راست برابر $c(\frac{7}{10})^h n = c$ است.

**۷.۱** طبق قضیه‌ی اصلی چون $n^4 \lg n = \Omega(n^{\log_9^{8+\epsilon}})$ است، پس جواب گزینه‌ی اول است.

**۸.۱** با استقرا می‌توان نشان داد که $G_n \le 4^n$ است. برای پایه‌های $n < 3$ حکم برقرار است. حال با فرض درستی حکم برای $n < k$، برای $n = k$ داریم:

$$\begin{aligned} G_n &= G_{n-1} + 2G_{n-2} + G_{n-3} \\ &\le 4^{n-1} + 2 \times 4^{n-2} + 4^{n-3} \\ &\le 4^{n-1} + 2 \times 4^{n-1} + 4^{n-1} \\ &\le 4 \times 4^{n-1} \\ &\le 4^n \end{aligned}$$

نیز می‌توان نشان داد که $\exists\, n_0 : \forall_{n \ge n_0} \frac{G_n}{G_{n-1}} > 2$.

**۹.۱** می‌دانیم که $\lg n! = \Theta(n \lg n)$. چون درجه‌ی رشد $n^{\frac{99}{100}}$ از $\lg n!$ بیش‌تر است پس طبق قضیه‌ی اصلی جواب همان $\Theta(n \lg n)$ است.