



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی دکترا

عنوان:

دیدپذیری در حضور انعکاس

نگارش:

آرش واعظی

استاد راهنما:

دکتر محمد قدسی

شهریور ۱۴۰۰

صلى الله عليه وسلم

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی دکترا

عنوان: دیدپذیری در حضور انعکاس

نگارش: آرش واعظی

کمیته‌ی ممتحنین

امضاء: استاد راهنما: دکتر محمد قدسی

امضاء: استاد ممتحن داخلی: دکتر محمدعلی آبام

امضاء: استاد ممتحن داخلی: دکتر محمد بیگی

امضاء: استاد ممتحن خارجی: دکتر محمد زارعی

امضاء: استاد ممتحن خارجی: دکتر علی محدث

امضاء: استاد ممتحن خارجی: دکتر زاهد رحمتی

امضاء: ریاست جلسه: دکتر رامان رامسین

تاریخ:

چکیده

مسائل دیدپذیری^۱ و انعکاس^۲ کاربردهای فراوانی در کشف حقایق دنیا و ساخت تکنولوژی‌های جدید دارند و پیچیده‌تر از آن هستند که به نظر می‌رسد. نسخه‌های ساده شده‌ی این مسائل سال‌هاست در دست بررسی است. در این پایان‌نامه نیز نمونه‌هایی از این مسائل بررسی شده است. حالتی را در نظر بگیرید که در آن یک ناظر، داخل یک چندضلعی ساده P ، قرار دارد. سوال این است که ناظر توسط چه اضلاعی از P به عنوان انعکاس‌دهنده، می‌تواند یک نقطه یا پاره‌خط داده شده‌ی دیگر را به عنوان هدف ببیند؟ این هدف به طور پیش‌فرض برای ناظر غیرقابل دید در نظر گرفته شده است. توجه کنید که یافتن همه‌ی اینچنین اضلاعی مد نظر است. این مسئله در این پایان‌نامه بررسی شده است و یک الگوریتم خطی با توجه به تعداد اضلاع چندضلعی P برای حل آن داده شد. لازم به ذکر است که الگوریتم خطی با توجه به پیچیدگی مسئله بهینه است. مقاله‌ی این نتیجه برای اولین بار در کنفرانس *EuroCG* به چاپ رسید [۴۴]. در این مقاله تمامی اضلاعی که با انعکاس خود بتوانند بخشی از یک پاره‌خط داده شده‌ی غیرقابل دید توسط ناظر را دیدپذیر کنند در زمان $\Theta(n)$ پیدا می‌شوند. همچنین مشخص می‌شود که چه قسمتی از هر ضلع باید به انعکاس‌دهنده تبدیل شود تا هدف مورد نظر برای ناظر دیدپذیر شود. پس از آن مسئله به این صورت گسترش یافت که ناظر به جای یک نقطه یک پاره‌خط باشد. هدف این بود که بدانیم دقیقاً چه قسمت‌هایی از پاره‌خط توسط چه قسمت‌هایی از اضلاع انعکاس‌دهنده دیدپذیر می‌شوند. برای این مسئله الگوریتم خطی قبلی برای تمامی حالات تعریف شده در خصوص انواع دیدپذیری یک پاره‌خط تعمیم داده شد. انواع دیدپذیری یک پاره‌خط در سال ۱۹۹۸ توسط آقای Aronov و دوستانشان مطرح شده بود [۲]. این نتیجه در کنفرانس *WALCOM* پذیرفته شد [۴۲]. نتایج این تحقیقات مجدداً تکمیل شد و با اضافه شدن برخی جزئیات به ژورنال معتبر *TCS* فرستاده و پذیرفته شد [۴۳]. سپس دیگر حالات مسئله، براساس کاربرد تعریف شد و پس از انجام ساده‌سازی‌های لازم مورد بررسی گرفت. در واقع گاهی نیاز است تنها یک منطقه‌ی خاص به دید ناظر اضافه شود و بقیه مناطق نباید دیده شوند. مثلاً در کاربرد نظامی ممکن است منع امنیتی داشته باشد. یا اینکه ممکن است نیاز باشد حداقل یک مقدار خاص به ناحیه‌ی دیدپذیر ناظر اضافه شود و اگر منطقه‌ی دیگری هم پوشیده شد اشکال ندارد. بر اساس آنچه گفته شد، دو نوع مسئله تعریف کردیم: (۱) به چندضلعی دیدپذیر ناظر یک مقدار دقیق اضافه شود (یا ۲) به چندضلعی دیدپذیر ناظر یک مقدار حداقل از پیش تعیین شده اضافه شود. این مقدار می‌تواند تعدادی رأس دیده نشده یا مساحت دیده نشده‌ای از چندضلعی باشد. که در این مستند مساحت در نظر گرفته شد چرا که از نظر مفهومی به ناحیه‌ی دیدپذیر نزدیکتر است.

از طرفی هر یک از موارد فوق‌الذکر مسئله در حالات مختلفی که نوع انعکاس در یک جهت خاص (آینه‌ای^۳) یا در همه جهات (پخش‌شونده^۴) باشد، یا زمانی که بیشتر از یک انعکاس^۵ مد نظر باشد نیز بررسی شده است. بنابراین برای مسئله‌ی افزایش مساحت دیدپذیر یک ناظر، در کل ۸ حالت وجود دارد. ۳ حالت مسئله باز^۶ است و ۵ حالت دیگر بررسی و ثابت شد که در گروه مسائل ان‌پی-سخت یا ان‌پی-کامل هستند. در نتیجه مسئله در حالات سخت‌تر نیز ان‌پی-سخت^۷ یا ان‌پی-کامل^۸ خواهد بود. حالتی که هدف آن است که حداقل یک مقدار مشخص به مساحت چندضلعی دیدپذیر ناظر اضافه

^۱Visibility

^۲Reflection

^۳specular

^۴diffuse

^۵multiple reflections

^۶open

^۷NP-hard

^۸NP-complete

شود بیشتر مورد توجه است. برای این حالت زمانی که چندضلعی اولیه یک قیف^۹ یا یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف^{۱۰} باشد یک الگوریتم ارائه دادیم. نتایج فوق به یک ژورنال معتبر فرستاده شده است [۴۶].

استفاده از انعکاس ادامه پیدا کرد و برای حل یکی از مسائل مشهور دنیا به نام مسئله‌ی محافظت از موزه‌ی هنر^{۱۱} به کار گرفته شد. استفاده از انعکاس برای بررسی این مسئله قبلاً توسط آقای Chao Xu در سال ۲۰۱۱ نیز بکار گرفته شده بود [۴۸]. انواع مختلفی از مسئله‌ی محافظت از موزه‌ی هنر همواره مورد توجه محققان بوده است. لیکن آنچه در این پایان‌نامه مورد توجه گرفته است مدل محافظت از طریق حفاظ‌های رأسی^{۱۲} و حفاظ‌های-نقطه‌ای^{۱۳} است. در مدل حفاظ‌های-رأسی، دوربین‌های حفاظتی، که به نام حفاظ خوانده می‌شوند، فقط مجاز هستند بر روی رئوس یک چندضلعی داده شده به عنوان محوطه‌ی موزه قرار بگیرند. در مدل استفاده از حفاظ‌های-نقطه‌ای، دوربین‌ها یا حفاظ‌های امنیتی روی هر نقطه‌ای از داخل یا محیط چندضلعی داده شده می‌توانند قرار بگیرند. در هر دو مدل هدف پیدا کردن کمترین تعداد حفاظ برای پوشش کامل چندضلعی است.

در حالتی که حفاظ‌های-رأسی مد نظر است، اگر پاسخ بهینه برای پوشاندن کل چندضلعی دارای α عدد حفاظ باشد، در این پایان‌نامه نشان خواهیم داد که r عدد انعکاس پخش‌شونده در یک چندضلعی (حتی حفره دار) تعداد حفاظ‌های مورد نیاز در حالت بهینه را حداکثر به $\lceil \frac{\alpha}{1+\frac{1}{r}} \rceil$ کاهش می‌دهد. همچنین، مسئله‌ی محافظت از موزه‌ی هنر توسط حفاظ‌های رأسی و در حضور حداکثر r انعکاس، انعکاس از نوع پخش‌شونده یا آینه‌ای، را می‌توان در زمان $O(n^{4r+1}+2)$ و با تقریب $O(\log n)$ حل کرد. این نتیجه نیز به همراه نتایج فوق‌الذکر به ژورنال معتبر دیگری فرستاده شده است [۴۶].

یک ضریب تقریب برای مسئله‌ی محافظت از موزه‌ی هنر توسط حفاظ‌های-نقطه‌ای برابر است با $O(\log |OPT|)$ که توسط آقای Bonnet و دوستانشان در سال ۲۰۲۰ ارائه شد [۱۰]. تا زمان نگارش این مستند این ضریب تقریب بهترین ضریب تقریب برای حل این مسئله است. کمک به دیدپذیری هر حفاظ توسط انعکاس-آینه‌ای یگانه^{۱۴} برای این مدل از مسئله بررسی شد و برای این نسخه‌ی تعمیم یافته از مسئله، یک الگوریتم ارائه داده‌ایم که محل قرار دادن حفاظ‌ها را با ضریب تقریب $O(1)$ پیدا می‌کند. این نتایج برای یک کنفرانس معتبر آماده و فرستاده شده است [۴۵].

کلمات کلیدی: دیدپذیری، ضلع-انعکاسی، انعکاس پخش‌شونده، انعکاس آینه‌ای، مسئله‌ی محافظت از موزه‌ی هنر، ان‌پی-کامل، ان‌پی-سخت

^۹funnel

^{۱۰}Weak Visible Polygon

^{۱۱}Art Gallery Problem

^{۱۲}vertex guards

^{۱۳}point guards

^{۱۴}single specular reflection

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۳	مسئله‌ی حفاظت موزه‌ی هنر	۱.۱
۳	مسائل مورد بحث در پایان‌نامه	۲.۱
۷	افزایش هدف‌دار چندضلعی دیدپذیر	۲
۷	کلیت الگوریتم	۱.۲
۹	الگوریتم ۱.۱.۲	۱.۱.۲
۱۰	محاسبه‌ی رئوس LBV و RBV	۲.۲
۱۰	الگوریتم ۳.۲	۳.۲
۱۶	تحلیل و اثبات درستی الگوریتم ۳.۲	۱.۳.۲
۱۶	مشخص کردن قسمت‌های دیدپذیر پاره‌خط هدف	۴.۲
۱۷	الگوریتم ۱.۴.۲	۱.۴.۲
۱۷	تحلیل الگوریتم ۱.۴.۲	۲.۴.۲
۱۷	گسترش چندضلعی دیدپذیر یک پاره‌خط	۵.۲
۱۹	تمام نقاط ناظر به طور کامل پاره‌خط هدف را ببینند.	۱.۵.۲
۱۹	تمام نقاط ناظر حداقل یک نقطه از پاره‌خط هدف را ببینند.	۲.۵.۲
۲۰	ناظر با دیدپذیری ضعیف تمام پاره‌خط هدف را ببیند.	۳.۵.۲
۲۳	حداقل یک نقطه از پاره‌خط ناظر حداقل یک نقطه از پاره‌خط هدف را ببیند.	۴.۵.۲
۲۳	جمع‌بندی فصل	۶.۲

۲۵	افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر	۳
۲۶	افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر به یک مقدار دقیق با داشتن نوع انعکاس آینه‌ای	۱.۳
۲۶	چندضلعی کاهش	۱.۱.۳
۳۰	افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر به یک مقدار دقیق در حضور انعکاس پخش شونده	۲.۳
۳۶	افزایش مساحت دیدپذیر تا یک مقدار حداقل	۳.۳
۳۸	افزایش چندضلعی دیدپذیر توسط یک ناظر داخل یک قیف	۱.۳.۳
۴۰	افزایش چندضلعی دیدپذیر توسط یک ناظر داخل یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف	۲.۳.۳
۴۱	انعکاس چندگانه	۳.۳.۳
۴۲	جمع‌بندی فصل	۴.۳
۴۳	مسئله حفاظت موزه‌ی هنر در حضور انعکاس پخش شونده	۴
۴۶	الگوریتم تقریبی	۱.۴
۴۷	جمع‌بندی فصل	۲.۴
۴۹	مسئله‌ی حفاظت موزه هنر در حضور اضلاع آینه‌ای	۵
۵۰	الگوریتم تقریبی	۱.۵
۵۱	برخی تعاریف استفاده شده در الگوریتم	۱.۱.۵
۵۲	توصیف الگوریتم	۲.۱.۵
۵۸	رویه‌ی افراز چندضلعی‌های محدب-پوشا	۳.۱.۵
۶۳	تحلیل	۴.۱.۵
۶۶	جمع‌بندی فصل	۲.۵
۶۹	جمع‌بندی و کارهای آتی	۶
۷۱	کاربردهای مسئله	آ
۷۱	شبکه‌های بی‌سیم	۱.آ
۷۱	دید در فضا	۲.آ
۷۳	دید در شب	۳.آ
۷۴	آنتن‌های مخابراتی	۴.آ

فهرست شکل‌ها

۱.۲	اگر $L_2(e)$ پاره‌خط $\overline{v_1(e)LBV(e)}$ را قطع کند و یا $L_1(e)$ از پاره‌خط $\overline{v_2(e)RBV(e)}$ عبور کند.
۸	آنگاه دیدپذیری ضلع - انعکاسی e مسدود می‌شود.
۲.۲	با توجه به تعریف ۱.۲ $LBV(e_1)$ برابر است با رأس p_5
۹	شکل‌های محدب چپ و راست
۳.۲	شکل‌های محدب چپ و راست
۴.۲	یک نمونه از ساختار $TP(\overline{uw})$
۵.۲	بروز شدن شکل محدب در حین پیمایش $TP(\overline{uw})$
۱۳	ساختن شکل محدب برای یافتن رؤس LBV
۱۳	موقعیت‌های متفاوت قرار گیری رؤس LBV
۱۴	موقعیت‌های متفاوت قرار گیری رؤس LBV
۱۵	مثالی برای حالت استثنائی که پاره‌خط هدف باید در جهت معکوس بررسی شود.
۱۸	$p_3 = LBV(e_2)$ ، و تداخل امتداد $q'(e_2)$ و \overline{uw} برابر است با $u'(e_2)$
۹.۲	جایگزین‌های نیم‌خط‌های $L_1(e)$ و $L_2(e)$ در هنگام استفاده از الگوریتم ۱.۱.۲
۲۱	ساخت یک شکل محدب شبیه به شکل - محدب - راست شبیه به آنچه در الگوریتم ۳.۲ ساخت می‌شود.
۱۱.۲	ساخت یک شکل محدب شبیه به شکل - محدب - راست شبیه به آنچه در الگوریتم ۳.۲ ساخت می‌شود.
۱.۳	ساختار چندضلعی کاهش برای مسئله‌ی گسترش چندضلعی دیدپذیر در حالت انعکاس آینه‌ای یگانه
۲۷	ساختار چندضلعی کاهش برای مسئله‌ی گسترش چندضلعی دیدپذیر در حالت انعکاس آینه‌ای یگانه
۲.۳	دو قسمت اصلی چندضلعی کاهش در این شکل به نمایش گذاشته شده است.
۲۸	نحوه‌ی صحیح قرار دادن مثلث‌های با مساحت‌های متناظر با مقادیر نمونه مسئله‌ی جمع - زیرمجموعه‌ها
۳.۳	پشت پنجره‌ها در چندضلعی کاهش.
۲۸	چندضلعی کاهش ساخته شده برای مسئله‌ی گسترش چندضلعی دیدپذیر در حضور انعکاس آینه‌ای
۴.۳	چندضلعی کاهش ساخته شده برای مسئله‌ی گسترش چندضلعی دیدپذیر در حضور انعکاس آینه‌ای
۲۹	چندگانه کار نمی‌کند.
۵.۳	طرح یک قطعه از چندضلعی کاهش در حالت انعکاس پخش شونده
۳۰	طرح یک قطعه از چندضلعی کاهش در حالت انعکاس پخش شونده
۶.۳	ناحیه‌ی دیدپذیر کوچک SMV
۳۱	ناحیه‌ی دیدپذیر کوچک SMV

- ۷.۳ شمای کامل چندضلعی کاهش برای حالت انعکاس پخش شونده ۳۱
- ۸.۳ در انعکاس چندگانه باید روی دیدپذیری-انعکاسی دو ضلع حساب کرد. ۳۵
- ۹.۳ چندضلعی کاهش تغییر یافته ۳۸
- ۱۰.۳ مثالی از ساختار یک قیف ۳۹
- ۱۱.۳ وتر بهترین انتخاب برای گسترش دیدپذیری یک ناظر داخل یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف ۴۱
- ۱.۴ چندضلعی دیدپذیر نقطه‌ی y ($VP(y)$) از طریق چهار انعکاس پخش شونده برای u دیدپذیر است. اضلاع-
انعکاسی با رنگ قرمز نشان داده شده‌اند. ۴۴
- ۲.۴ دو حفاظ که نمی‌توانند توسط یک حفاظ جایگزین شوند، گرچه انعکاس مجاز است. ۴۵
- ۱.۵ مراحل الگوریتم ۱.۵ از افزار چندضلعی تا لحظه‌ی یافتن یک زیرناحیه‌ی-موقت ۵۲
- ۲.۵ یک مثال برای تفهیم عملیات جاروب ۵۹
- ۳.۵ نحوه‌ی افزایش یک چندضلعی-محدب-پوشا ۶۰
- ۴.۵ موقعیت‌های مختلفی که SL ممکن است با آن‌ها برخورد کند. ۶۱
- ۵.۵ یک مثال که نشان می‌دهد که انعکاس می‌تواند بسیار مفید باشد. ۶۴
- ۱.آ امواج نامرئی مانند مادون قرمز از منابع با فاصله‌ی دور با انعکاس به ما می‌رسند و با کشف جهت و نوع
آن‌ها می‌توان اطلاعات زیادی بدست آورد. ۷۲
- ۲.آ مثالی از دید منعکس شده که توسط دوربین‌های ناسا گرفته شده است. ۷۳
- ۳.آ پرتوهای ناچیزی از سطوح غیردرخشان به چشم می‌رسد. ۷۳
- ۴.آ سطوح retroreflector ۷۴
- ۵.آ آنتن‌های مخابراتی معمولاً در یک جهت خاص سیگنال ارسال می‌کنند. ۷۵
- ۶.آ مسئله‌ی وجود سیگنال در خطوط مترو شبیه به مسئله پیدا کردن محلی برای آینه‌ها در مسئله‌ی افزایش
دیدپذیری یک ناظر است. در راه‌حل‌های بیان شده مسئله به این صورت ساده شده است که تنها یک ناظر
و ورودی داریم و همه‌ی اضلاع باید آن را ببینند. اما در واقعیت ممکن است یک انعکاس دهنده توسط
ناظر (منبع) دیگری پوشش داده شود. ۷۵
- ۱.ب مثالی از یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف ۷۹
- ۲.ب مثالی از یک چندضلعی دیدپذیر کامل ۸۰
- ۳.ب مثالی از یک چندضلعی دیدپذیر قوی ۸۰

-
- ب.۴ مثالی از یک ضلع-آینه‌ای ۸۱
- ب.۵ مثالی از یک ضلع مجهز به انعکاس پخش‌شونده ۸۲

فصل ۱

مقدمه

دیدپذیری آن است که کاری کنیم تا یک ناظر بتواند ببیند یا اینکه کاری کنیم تا یک هدف توسط یک ناظر ثابت و از پیش تعیین شده دیده شود. مسائل دیدپذیری و انعکاس سال‌ها مورد علاقه محققان بوده‌اند. و گونه‌های مختلفی از آن‌ها بررسی شده است [۲۹، ۳۶، ۳۷، ۴۹، ۳۰، ۳۱، ۳۵، ۳۹، ۴۰، ۱۳]. برای پی‌بردن به اهمیت انعکاس توجه کنید که روشنایی روز به دلیل نور خورشید نیست، چرا که خورشید در خارج از جو زمین روشنایی ایجاد نمی‌کند. روشنایی روز به علت انعکاس و تجزیه انرژی رسیده از خورشید توسط ذرات آب و هوا در جو زمین است. یک چندضلعی ساده^۱، چندضلعی است که اضلاع متقاطع ندارد و حفره هم ندارد. یک چندضلعی ساده به نام P در یک فضای دوبعدی و یک ناظر q داخل P را در نظر بگیرید، در زمان خطی از n (تعداد رئوس/اضلاع چندضلعی) می‌توان تمامی نقاطی از P که ناظر می‌بیند را محاسبه کرد [۱۵، ۵]. مجموعه‌ی این نقاط خود یک چندضلعی ساده خواهد شد. یک ناظر می‌تواند یک نقطه (q) یا یک پاره‌خط (\overline{xy}) باشد. به بزرگترین چندضلعی دیدپذیر توسط یک ناظر، چندضلعی دیدپذیر^۲ می‌گویند $VP(q)$ یا $VP(\overline{pq})$. چنانچه گفته شد چندضلعی دیدپذیر در زمان خطی برحسب n قابل محاسبه است.

دیدپذیری یک پاره‌خط تاکنون با تعاریف متفاوتی مورد بررسی قرار گرفته است [۴] که عبارتند از: دیدپذیری ضعیف، دیدپذیری کامل، دیدپذیری قوی.

۱. چندضلعی دیدپذیر ضعیف:

بزرگترین چندضلعی داخل چندضلعی اصلی است که توسط حداقل یک نقطه از پاره‌خط ناظر، دیدپذیر باشد. دیدپذیری ضعیف بسیار پرکاربرد است و مقالات زیادی مسائل مختلف مرتبط با چندضلعی دیدپذیر ضعیف را بررسی کردند [۲۳، ۳۲].

۲. چندضلعی دیدپذیر کامل:

بزرگترین چندضلعی داخل چندضلعی اصلی است که توسط تمام نقاط پاره‌خط ناظر، دیدپذیر باشد.

۳. چندضلعی دیدپذیر قوی:

^۱Simple Visibility Polygon

^۲Visibility Polygon

بزرگترین چندضلعی داخل چندضلعی اصلی است که تمام نقاط داخل آن حداقل توسط یک نقطه یا یک بازه‌ی مشخص روی پاره‌خط ناظر دیدپذیر باشند. این نقطه یا بازه می‌تواند تمامی چندضلعی دیدپذیر ناظر را ببیند. در این زمینه نیز تحقیقات وسیعی انجام گرفته است [۲۰].

توصیف این تعاریف به همراه شکل در پیوست ب آورده شده است.

مسلماً وجود انعکاس در اضلاع چندضلعی می‌تواند باعث افزایش چندضلعی دیدپذیر^۳ ناظر شود. ساده‌ترین حالت آن است که یک نقطه داده شده q به عنوان ناظر داخل P داده شده است. چنانچه یک ضلع e از P مانند آینه عمل کند، آنگاه محاسبه‌ی چندضلعی دیدپذیر q در حضور e به زمان $\Theta(n)$ احتیاج دارد [۲۷].

در این مستند فرض شده است که همه‌ی ضلع‌ها می‌توانند به عنوان انعکاس‌دهنده انتخاب شوند. اگر تنها بخشی از یک ضلع توسط ناظر یا ضلع‌های انعکاس‌دهنده میانی دیده شود عملاً تنها همان بخش در دید ناظر تاثیرگذار خواهد بود. به ضلعی که پتانسیل انتخاب به عنوان انعکاس‌دهنده را دارد ضلع-انعکاس‌دهنده گفته می‌شود. به ناحیه‌ای که توسط یک ضلع-انعکاس‌دهنده‌ی e برای ناظر دیدپذیر است، ناحیه‌ی دیدپذیر^۴- e گفته می‌شود. ساده‌ترین حالت آن است که یک نقطه داده شده q به عنوان ناظر داخل P داده شده است. چنانچه یک ضلع e از P مانند آینه عمل کند، آنگاه می‌توان در زمان خطی چندضلعی دیدپذیر q در حضور e را محاسبه کرد [۲۷].

اما اگر تعداد بیشتری از اضلاع را به عنوان آینه در نظر بگیریم چه اتفاقی خواهد افتاد؟ Klee در سال ۱۹۶۹ برای اولین بار مسئله دیدپذیری در حضور اضلاع انعکاس‌کننده را مطرح کرد [۲۶]. او مسئله را چنین مطرح کرد که اگر همه‌ی اضلاع چندضلعی مانند آینه عمل کنند، آیا همه‌ی نقاط داخلی چندضلعی توسط ناظر دیده می‌شوند؟ در سال ۱۹۹۵ Torkarsky این سوال را پاسخ داد. او یک چندضلعی با خاصیت مذکور ساخت که داخل آن یک نقطه تاریک^۴ وجود داشت [۴۱].

در مبحث دیدپذیری در حضور اضلاع انعکاس‌دهنده، انواع مختلفی از انعکاس‌دهنده‌ها تاکنون مطرح شده است. دو نوع انعکاس آینه‌ای^۵ و پخش‌شونده^۶ از مهمترین آن‌ها هستند. در نوع آینه‌ای اشعه‌ی نور دقیقاً با زاویه یکسان منعکس می‌شود. حال آنکه در نوع پخش‌شونده به هر طریقی که یک اشعه‌ی نور به ضلع برخورد کند، ضلع انعکاس‌دهنده فارغ از جهت تابیده شده اشعه، آن را در همه‌ی جهات بازتاب می‌دهد و در واقع مانند یک نیم‌صفحه برای ناظر دیدپذیری ایجاد می‌کند. در انعکاس آینه‌ای می‌توان هر زاویه‌ی ثابتی را برای زاویه‌ی بازتابش در نظر گرفت لیکن در این پایان‌نامه نیز مطابق دیگر تحقیقات پیشین انعکاس را با زاویه مساوی در نظر می‌گیریم.

در برخی مقالات دیدپذیری چندگانه^۷ نیز مطرح شده است. دیدپذیری چندگانه بدین معناست که ناظر می‌تواند از طریق بیش از یک ضلع انعکاس‌دهنده دیدپذیری داشته باشد. مثلاً در دیدپذیری^۲ - گانه از نوع آینه‌ای، ناظر می‌تواند از طریق یک آینه، آینه‌ای دیگر و از طریق آینه‌ی دوم مناطقی از چندضلعی داده شده را ببیند. در این مقالات معمولاً بیشترین تعداد مجاز انعکاس مشخص شده است. معمولاً دو حالت کلی انعکاس یگانه^۸ و انعکاس چندگانه را در نظر می‌گیرند و مسائل مختلف را در این دو حالت به طور جداگانه بررسی می‌کنند.

^۳Visibility Polygon

^۴Dark point

^۵Specular

^۶Diffuse

^۷Multiple Reflections

^۸Single Reflection

اگر همه‌ی اضلاع چندضلعی P را آینه فرض کنیم، ممکن است چندضلعی دیدپذیر یک ناظر نقطه‌ای q داده شده داخل P ، یک چندضلعی ساده نباشد و ممکن است حفره داشته باشد [۳]. در واقع اگر به تعداد r انعکاس مجاز باشد، می‌توان در زمان $O(n^{2r} \log n)$ چندضلعی دیدپذیر q را بدست آورد [۲].

در این پایان‌نامه نیز گونه‌هایی از دیدپذیری در حضور انعکاس مورد بررسی قرار می‌گیرند. یکی از مشهورترین مسائل دیدپذیری مسئله‌ی حفاظت موزه‌ی هنر^۹ است. این مسئله از بیش از سی سال پیش مطرح شده است [۲۲] و کاربردهای مختلفی دارد. در این پایان‌نامه مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر، در حالتی که دیوارهای موزه با آینه پوشش داده شده‌اند در نظر گرفته شوند، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۱ مسئله‌ی حفاظت موزه‌ی هنر

مسئله این است که یک چندضلعی ساده P داده شده است و می‌خواهیم کمترین تعداد دوربین را داخل این چندضلعی قرار دهیم تا همه‌ی نقاط P پوشش داده شوند. از آنجایی که دوربین‌ها جهت حفاظت موزه مورد استفاده قرار خواهند گرفت، به آن‌ها محافظ^{۱۰} گفته می‌شود. در این مسئله برای سادگی فرض می‌شود که دید دوربین‌ها ۳۶۰ درجه است و برد دید دوربین‌ها به اندازه کافی زیاد است. اینکه محل مجاز دوربین‌های حفاظتی در کدام قسمت‌های P باشد، نسخه‌های مختلفی از مسئله را رقم می‌زند. چنانچه دوربین‌ها فقط مجاز به نصب بر روی رئوس P باشند، آن‌ها را حفاظ رأسی^{۱۱} می‌نامیم. چنانچه در هر نقطه‌ی داخل چندضلعی مجاز به گذاشتن دوربین‌ها باشیم، آن‌ها را حفاظ نقطه‌ای^{۱۲} می‌نامیم.

سختی مسئله‌ی حفاظت موزه‌ی هنر ابتدا برای چندضلعی‌های حفره‌دار بررسی شد و اثبات شد که این حالت مسئله در گروه مسائل ان‌پی-کامل^{۱۳} قرار دارد [۳۴]. در سال ۱۹۸۶، Lee و Lin ثابت کردند که برای حالتی که حفاظ روی رئوس مجاز باشد و موزه یک چندضلعی ساده باشد، مسئله دوباره در گروه مسائل ان‌پی-کامل قرار می‌گیرد [۲۸]. این نتیجه بعداً تعمیم داده شد و برای حفاظ‌های نقطه‌ای نیز نتیجه مشابهی پیدا شد [۱]. چنانچه چندضلعی حفره داشته باشد دادن الگوریتمی که تقریب $O(\log n)$ داشته باشد در گروه مسائل ان‌پی-سخت^{۱۴} است [۳۸، ۱۹].

آقای Gosh الگوریتمی با تقریب $O(\log n)$ داد که برای زمانی که فقط حفاظ‌هایی بر روی رئوس چندضلعی مجاز است کار می‌کند. این الگوریتم برای هر دو حالت چندضلعی ساده یا چندضلعی حفره‌دار قابل استفاده است [۲۱]. این ضریب تقریب در سال ۲۰۱۱ به $O(\log \log OPT)$ ارتقاء داده شد [۲۵]. البته این نتیجه فقط برای زمانبست که حفاظ‌ها بتوانند بر روی محیط یک چندضلعی ساده قرار بگیرند.

۲.۱ مسائل مورد بحث در پایان‌نامه

به طور خاص مسائل زیر در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت:

^۹Art Gallery Problem

^{۱۰}Guard

^{۱۱}Vertex Guards

^{۱۲}Points Guards

^{۱۳}NP-complete

^{۱۴}NP-hard

۱. افزایش هدف دار چندضلعی دیدپذیر: چندضلعی ساده P ، یک ناظر و یک هدف (یک پاره خط) داخل چندضلعی داده شده است. پاره خط هدف برای ناظر دیدپذیر نیست. مسئله این است که کدام اضلاع P به عنوان انعکاس دهنده انتخاب شوند تا هدف برای ناظر دیدپذیر شود. میزان دیدپذیر شدن پاره خط هدف، نوع ناظر (نقطه/پاره خط)، نوع انعکاس (آینه‌ای یا پخش شونده) و تعداد انعکاس مجاز انواع مختلفی از مسئله را رقم می‌زنند. این نسخه‌ها در مقالات مختلفی بررسی و الگوریتم بهینه برای آن‌ها داده شده است [۴۳، ۴۲، ۴۴]. در مقاله [۴۳] الگوریتم مورد نظر حالات مختلف دیدپذیری ناظر (پاره خط) و پاره خط هدف را بررسی کرده است. در این مقاله تمامی انواع تعاریف دیدپذیری پاره خط بررسی شده و الگوریتم خطی برای آن‌ها داده شده است. لازم به ذکر است که الگوریتم خطی برای این نسخه مسئله بهینه است. فصل دوم پایان‌نامه به مسئله‌ی افزایش هدف دار چندضلعی دیدپذیر پرداخته است.

۲. افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر به یک میزان داده شده k : مسئله‌ی افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر در موارد زیر قابل بررسی است:

۱- دقت مورد نظر برای افزایش مساحت

۲- نوع انعکاس مورد نظر: آینه‌ای یا پخش شونده

۳- تعداد انعکاس مجاز

هر یک از این موارد دو حالت برای مسئله بوجود می‌آورند. بنابراین در کل ۸ نسخه از مسئله قابل بررسی است. در این پایان‌نامه برای ۵ حالت از این حالات ثابت می‌کنیم که مسئله در گروه مسائل ان پی-کامل یا ان پی-سخت است. بقیه حالات مسئله به صورت باز^{۱۵} باقی مانده است.

بر اساس کاربرد تعریف شده و ساده‌سازی‌های انجام گرفته، گاهی نیاز است تنها یک منطقه‌ی خاص به دید ناظر اضافه شود و بقیه مناطق نباید دیده شوند مثلاً در کاربرد نظامی ممکن است منع امنیتی داشته باشیم. در حالت دیگر ممکن است کافی باشد که چندضلعی دیدپذیر ناظر حداقل تا یک میزان مشخص بزرگ شود و اگر منطقه‌ی دیگری هم پوشیده شد اشکال ندارد. بر این اساس به طور کلی دو نوع مسئله تعریف می‌شود: (۱) به چندضلعی دیدپذیر ناظر یک مقدار دقیق اضافه شود و یا (۲) به ناحیه چندضلعی دیدپذیر ناظر یک مقدار حداقل از پیش تعیین شده اضافه شود. این مقدار می‌تواند تعدادی رأس دیده نشده یا مساحت دیده نشده‌ای از چندضلعی باشد. در این تحقیق مساحت در نظر گرفته شد چراکه از نظر مفهومی به ناحیه دیدپذیر نزدیکتر است. فصل سوم مسئله‌ی افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر را مورد بررسی قرار می‌دهد.

۳. مسئله حفاظت موزه‌ی هنر در حضور انعکاس پخش شونده.

در واقع دیدپذیری در حضور انعکاس می‌تواند به عنوان تعمیمی بر مسئله دیدپذیری عادی باشد. برای مثال، یک چندضلعی P در نظر بگیرید که می‌خواهیم توسط حفاظ‌های رأسی پوشانده شود. فرض کنید که r بار انعکاس پخش شونده برای هر ضلع مجاز است. مسلماً انعکاس پخش شونده اضلاع P بر روی تعداد حفاظ مورد نیاز برای پوشش کامل محیط تاثیر دارد. این نسخه از مسئله در فصل چهارم پایان‌نامه بررسی و تعداد مورد نیاز حفاظ در حالت بهینه محاسبه شده است.

^{۱۵}Open

۴. مسئله حفاظت موزهی هنر در حضور انعکاس آینه‌ای.

همانطور که گفته شد بدست آوردن کمترین تعداد حفاظ مورد نیاز برای زمانی حفاظها نقطه‌ای باشند از مسائل قدیمی و سخت حوزهی دیدپذیری است. استفاده از آینه بر روی دیوارهای چندضلعی می‌تواند در کمتر کردن تعداد حفاظها بسیار موثر باشد. این مسئله در فصل پنجم پایان‌نامه نشان داده شده است. در این فصل، الگوریتمی ارائه می‌دهیم که کمترین تعداد حفاظ نقطه‌ای مورد نیاز برای مسئلهی حفاظت از موزهی هنر در حضور اضلاع آینه‌ای را با تقریب $O(1)$ بدست آورد. این الگوریتم محل حفاظها را مشخص می‌کند. لازم به ذکر است که از آنجایی که در عمل یک انعکاس در آینه کارا تر است، در این نسخه از مسئله، انعکاس چندگانه بررسی نشده است.

در پیوست این مستند دو بخش آمده است. پیوست آ اشاره ای به برخی کاربردهای مسائل مرتبط با پایان‌نامه دارد و پیوست ب جمع‌آوری و توصیف بیشتر تعاریف مورد نیاز برای خواننده این مستند است تا خواننده بتواند مستقل از مباحث پایان‌نامه هر فصل را به طور جداگانه مطالعه کند و برای اطلاع از تعاریف به راحتی به این بخش مراجعه کند. به هر صورت تعاریف به طور مختصر در محل نیاز در هر بخش ذکر شده‌اند.

فصل ۲

افزایش هدف دار چندضلعی دیدپذیر

در این فصل با فرض اینکه ناظر یک نقطه است توضیحات لازم داده می‌شود و از الگوریتم‌های مطرح شده استفاده می‌شود و سپس توضیحات لازم برای زمانی که ناظر یک پاره‌خط داده شده باشد اضافه می‌گردد.

می‌خواهیم همه‌ی اضلاعی مانند e از چندضلعی ساده \mathcal{P} با n ضلع را پیدا کنیم که با انعکاس خود باعث می‌شوند که ناظر (نقطه) داده شده q قسمتی از یک پاره‌خط \overline{uw} غیر قابل دید توسط q را ببیند. بعداً خواهیم دید که چگونه بازه‌هایی از \overline{uw} را که توسط هر ضلع - انعکاسی دیدپذیر - انعکاسی می‌شود محاسبه می‌کنیم.

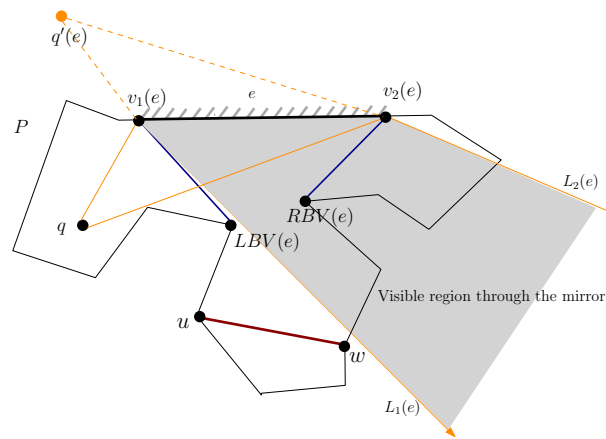
۱.۲ کلیت الگوریتم

مسئله هر ضلع - انعکاس دهنده‌ی e که بتواند حداقل بخشی از \overline{uw} را برای ناظر دیدپذیر کند باید روی اشتراک چندضلعی دیدپذیر q و چندضلعی دیدپذیر ضعیف پاره‌خط \overline{uw} ($WVP(\overline{uw})$) قرار داشته باشد. حال اگر هدف دیدپذیری کامل \overline{uw} باشد، بجای چند ضلعی دیدپذیر ضعیف \overline{uw} از چندضلعی دیدپذیر کامل \overline{uw} ($CVP(\overline{uw})$) استفاده می‌کنیم. با توجه به مقاله‌ی [۲۷] یافتن این اشتراک در زمان خطی امکان‌پذیر است.

یک ضلع - انعکاس دهنده e در نظر بگیرید. فرض کنید که e در جهت عقربه‌های ساعت از نقطه‌ی v_1 تا v_2 در ناحیه‌ی $VP(q) \cap WVP(\overline{uw})$ باشد (مانند شکل ۱.۲). از این قسمت ضلع e به عنوان آینه استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا هیچ قسمتی از \overline{uw} - دیدپذیر هست؟ فرض کنید که L_1 و L_2 به ترتیب دو نیم‌خط (اشعه‌ی) منعکس شده از دید q در v_1 و v_2 باشند. اضلاع - انعکاس دهنده را به ترتیب ساعتگرد شماره‌گذاری می‌کنیم و ضلع i ام را e_i می‌نامیم. و تصویر q در ضلع - انعکاس دهنده‌ی e_i از $v_1(e_i)$ تا $v_2(e_i)$ را $q'(e_i)$ می‌نامیم.

واضح است که اگر \overline{uw} با ناحیه‌ی دیدپذیر - انعکاسی e تداخل داشته باشد و هیچ قسمتی از چندضلعی \mathcal{P} مانع دید منعکس شده توسط e نشود، آنگاه \overline{uw} برای q توسط e دیدپذیر خواهد شد. اما از آنجا که چندضلعی \mathcal{P} یک چندضلعی ساده است تنها رئوس محدب^۱ می‌توانند مانع دید یک ضلع - انعکاس دهنده شوند. رئوس محدب یا رئوس برگشته رئوسی

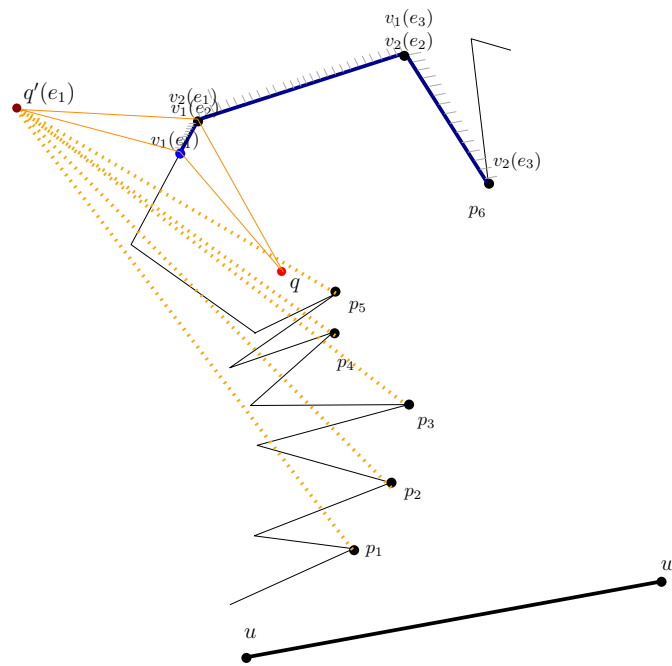
^۱ Reflex vertices or Convex vertices



شکل ۱.۲: اگر e یک ضلع-انعکاسی و q ناظر باشند. ناحیه‌ی بین دو نیم‌خط $L_1(e)$ و $L_2(e)$ ناحیه‌ی دیدپذیر-انعکاسی توسط e برای q خواهد بود. دقت کنید که تنها قسمتی از ضلع e از $v_1(e)$ تا $v_2(e)$ که برای ناظر دیدپذیر است در دیدپذیری-انعکاسی توسط e مفید است. برای هر ضلعی از \mathcal{P} باید اینچنین بازه‌ای پیدا شود. در این شکل مشخص است که اگر $L_2(e)$ پاره‌خط $\overline{v_1(e)LBV(e)}$ را قطع کند و یا $L_1(e)$ از پاره‌خط $\overline{v_2(e)RBV(e)}$ عبور کند. آنگاه دیدپذیری ضلع-انعکاسی e مسدود می‌شود.

از \mathcal{P} هستند که زاویه داخلی بیش از 180° درجه دارند. آنچه اهمیت دارد این است که برای هر ضلع \mathcal{P} کفایت تنها دو رأس از رئوس محدب چندضلعی را در نظر بگیریم. در بخش بعد نشان خواهیم داد که چگونه برای هر ضلع این رئوس را محاسبه می‌کنیم. همچنان خواهیم دید که تنها این دو رأس هستند که ممکن است مانع دیدپذیری-انعکاسی آن ضلع شوند. یکی از این رأس‌ها در سمت چپ پاره‌خط \overline{uw} و دیگری در سمت راست این پاره‌خط در نظر گرفته می‌شود. با بررسی این رأس‌ها برای هر ضلع-انعکاس‌دهنده متوجه می‌شویم که آیا این ضلع می‌تواند با کمک انعکاس حداقل بخشی از پاره‌خط دیده نشده \overline{uw} را برای ناظر دیدپذیر کند یا خیر؟ در واقع برای هر ضلع e از \mathcal{P} بررسی می‌کنیم که به منظور دیدن حداقل بخشی از پاره‌خط هدف، آیا می‌تواند از سمت چپ و یا سمت راست دیدپذیری-انعکاسی ایجاد کند؟ چنانچه پاسخ به این سوال مثبت بود، نشان می‌دهیم که تنها کفایت مانع نشدن دو رأس محدب در مسیر دیدپذیری-انعکاسی e شوند. برای یک ضلع-انعکاس‌دهنده e ؛ رأس محدبی که ممکن است مانع دیدپذیری-انعکاسی e از سمت چپ شود را $LBV(e)$ و رأس محدبی که ممکن است مانع دیدپذیری-انعکاسی e از سمت راست شود $RBV(e)$ می‌نامیم. تعریف رسمی این رئوس در ادامه آمده است.

تعریف ۱.۲ اگر بر روی $WVP(\overline{uw})$ در جهت ساعتگرد و با شروع از u حرکت کنیم فرض کنید رئوس محدب p_1, p_2, \dots, p_k را قبل از رسیدن به ضلع-انعکاس‌دهنده e ببینیم. در این صورت چنین تعریف می‌کنیم که راس p_j برابر با $LBV(e)$ است اگر خط گذرنده از $p_j q'(e)$ (در راستای p_j تا $q'(e)$) همه‌ی p_i های دیگر ($1 \leq i \leq k$) را در سمت چپ خود داشته باشد. در واقع اگر روی پاره‌خط $p_j q'(e)$ از سمت p_j به $q'(e)$ حرکت کنیم همه‌ی رئوس محدب دیگر در سمت چپ ما قرار خواهند گرفت. اگر بیش از یک رأس محدب این خاصیت را داشته باشند رأسی با کمترین اندیس را انتخاب می‌کنیم. و اگر رأسی با این تعریف وجود نداشت $v_1(e)$ را به عنوان $LBV(e)$ انتخاب می‌کنیم. $RBV(e)$ به طریقی مشابه



شکل ۲.۲: با توجه به تعریف ۱.۲ $LBV(e_1)$ برابر است با رأس p_5 .

تعریف می‌شود لیکن برای بدست آوردن آن کافیهست در جهت پادساعتگرد روی $WVP(\overline{uw})$ حرکت کنیم (به شکل ۲.۲ نگاه کنید).

دقت کنید که اضلاع مختلف ممکن است LBV یا RBV های یکسان داشته باشند. همچنین از تعریف ۱.۲ مشخص است که برای هر ضلع-انعکاس دهنده e ، $LBV(e)$ و $RBV(e)$ یکتا هستند. در بخش بعد خواهیم دید که چگونه برای همه‌ی اضلاع این رئوس در زمان خطی بدست می‌آیند.

۱.۱.۲ الگوریتم ۱.۱.۲

این الگوریتم بررسی می‌کند که آیا q می‌تواند از طریق ضلع-انعکاسی e قسمتی از \overline{uw} را ببیند.

فرض کنید که e از $v_1(e)$ تا $v_2(e)$ در $VP(q) \cap WVP(\overline{uw})$ قرار دارد و $L_1(e)$ و $L_2(e)$ مطابق آنچه قبلاً گفته شد تعریف شده‌اند. و نقاط LBV و RBV را برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی داریم. الگوریتم ۱.۱.۲ سه مرحله دارد:

۱. اگر $L_1(e)$ و $L_2(e)$ هر دو در یک سمت \overline{uw} قرار بگیرند به وضوح \overline{uw} در ناحیه دیدپذیر e نیست. و q نمی‌تواند از طریق e \overline{uw} را ببیند.

۲. در غیر اینصورت، اگر \overline{uw} دقیقاً بین $L_1(e)$ و $L_2(e)$ قرار بگیرد. در واقع در میان ناحیه‌ی دیدپذیر ضلع-انعکاسی قرار گرفته است و q می‌تواند \overline{uw} را از طریق e ببیند. زیرا می‌دانیم که e برای \overline{uw} دیدپذیر است، همچنین می‌دانیم که ناحیه‌ی دیدپذیر در اثر انعکاس ضلع e از $L_1(e)$ تا $L_2(e)$ یک ناحیه پیوسته است.

۳. اگر هیچکدام از موارد فوق برقرار نبود یکی از نیم‌خط‌های $L_1(e)$ یا $L_2(e)$ را قطع می‌کنند. در این حالت کفایت بررسی کنیم که آیا مانعی از \mathcal{P} تمام ناحیه دیدپذیر منعکس شده توسط e را مسدود می‌کند یا نه؟ دقت کنید که کافی است مسدود بودن کل ناحیه منعکس شده بررسی شود. برای این کار ناحیه منعکس شده توسط e را از چپ و راست بررسی می‌کنیم. اگر $LBV(e)$ در سمت چپ $L_2(e)$ باشد و همچنین $RBV(e)$ در سمت راست $L_1(e)$ باشد ناحیه دیدپذیر e کاملاً مسدود نشده است و q می‌تواند حداقل بخشی از \overline{uw} را ببیند. در غیر اینصورت q و \overline{uw} دیدپذیر نیستند.

(در حالتی که از $CVP(\overline{uw})$ به جای $WVP(\overline{uw})$ استفاده می‌کنیم کفایت چک کنیم که $L_1(e)$ و $L_2(e)$ از \overline{uw} عبور نکنند مگر از نقاط انتهایی پاره‌خط (\overline{uw}))

تحلیل الگوریتم ۱.۱.۲

بدیهی است که بررسی تداخل تعداد ثابتی خط و نقطه برای هر ضلع-انعکاسی در زمان ثابت امکان‌پذیر است. بنابراین بررسی کل اضلاع چندضلعی \mathcal{P} به زمان خطی بر اساس پیچیدگی چندضلعی نیاز دارد.

در مورد سوم الگوریتم، دلیل اینکه چرا کفایت تنها مسدود بودن کامل ناحیه دیدپذیری-انعکاسی بررسی شود به شرح زیر است:

از قبل می‌دانیم که ضلع-انعکاسی e برای q از $v_1(e)$ تا $v_2(e)$ دیدپذیر است. در مورد سوم الگوریتم، حداقل یکی از نیم‌خط‌های $L_1(e)$ یا $L_2(e)$ پاره‌خط \overline{uw} را قطع کرده است. بدون کاستی از کلیت مسئله فرض کنید که $L_1(e)$ از \overline{uw} رد شود و $LBV(e)$ دیدپذیری e را بگونه‌ای مسدود کرده باشد که هیچ قسمتی از \overline{uw} را نبیند. حال بر فرض که مقداری از ناحیه دیدپذیر e در آن سمت \overline{uw} باقی باشد و به طور کامل مسدود نشده باشد. لیکن این فرض با دیدپذیر بودن پاره‌خط $v_1(e)v_2(e)$ برای \overline{uw} تناقض دارد.

۲.۲ محاسبه‌ی رئوس LBV و RBV

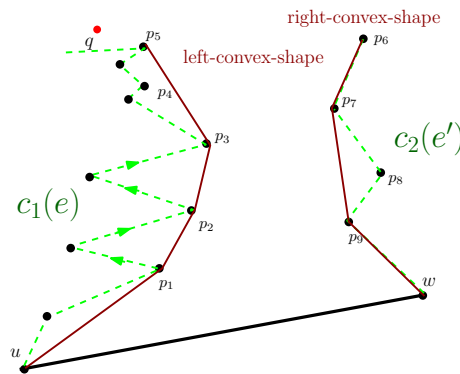
در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه در زمان خطی برحسب پیچیدگی چندضلعی \mathcal{P} می‌توان تمام رئوس LBV و RBV را برای همه اضلاع-انعکاسی پیدا کرد.

۳.۲ الگوریتم ۳.۲

ابتدا محاسبه‌ی رئوس LBV را در نظر بگیرید.

بسته به مسئله از قبل می‌دانیم که همه‌ی اضلاع-انعکاسی روی $VP(q) \cap WVP(\overline{uw})$ قرار دارند. برای توضیح بهتر الگوریتم فرض کنید این اضلاع به طور مرتب شده در جهت ساعتگرد باشند. و به صورت e_1e_2 نمایش داده می‌شوند.

فرض کنید که u (راس سمت چپ \overline{uw}) خود یک راس از \mathcal{P} باشد. می‌خواهیم برای هر ضلع-انعکاسی $(1 \leq i \leq e_i)$



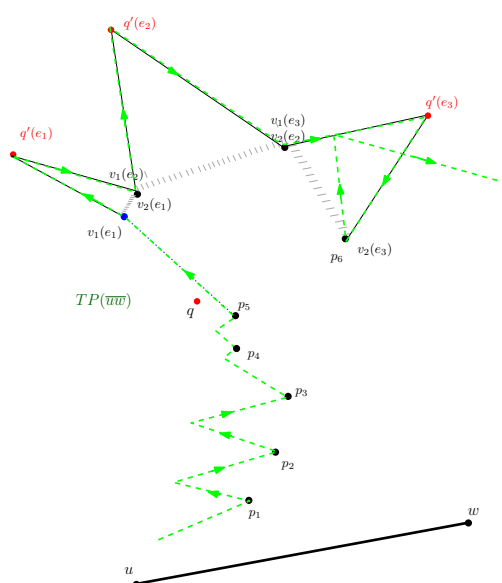
شکل ۳.۲: برای دو ضلع-انعکاسی، برای مثال e و e' ، $c_1(e)$ و $c_2(e')$ نشان دهنده‌ی زنجیره‌های متناظر با آن دو ضلع هستند. از آنجا که v_1 (یا در سمت دیگر v_2) برای اضلاع-انعکاسی متفاوت، متفاوت است زنجیره متناظرشان نیز متفاوت خواهد بود. در هر صورت، هر کدام از این زنجیره‌ها بر روی رئوس و اضلاع \mathcal{P} است. و یک شکل محدب در هر سمت می‌تواند تمام آن زنجیره‌ها را در بگیرد. شکل-محدب-چپ^۴ بر روی رئوس محدب \mathcal{P} ساخته می‌شود و برای محاسبه‌ی رئوس LBV برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی استفاده می‌شود. و از شکل-محدب-راست^۵ برای یافتن رئوس RBV بهره گرفته می‌شود.

(n یک رأس محدب ویژه تحت عنوان $LBV(e_i)$ پیدا کنیم. یک زنجیره $c_1(e_i)$ (شامل رئوس و یال‌ها) از \mathcal{P} را در نظر بگیرید که از u شروع می‌شود و در $v_1(e)$ خاتمه می‌یابد. آن خطی که از $LBV(e_i)$ و $q'(e_i)$ عبور می‌کند باید همه‌ی رئوس محدب $c_1(e_i)$ را در سمت چپ خود داشته باشد. این خط را $l_1(e_i)$ می‌نامیم. فرض کنید که هیچ رأس محدب دیگری روی این خط نباشد. توجه داشته باشید که از آنجا که از قبل می‌دانیم که e_i و مسلماً $\overline{v_1 e_i}$ برای \overline{uw} دیدپذیر است، بنابراین هیچ رأس محدبی از قسمت‌های دیگر \mathcal{P} بجز $c_1(e_i)$ نمی‌تواند دید e_i را از سمت چپ مسدود کند.

قصد داریم که همه‌ی خطوط $l_1 e_i$ (با به طور معادل رئوس $LBV(e_i)$) را پیدا کنیم. این خطوط یک خصوصیت مشترک دارند و آن اینکه همه‌ی رئوس محدب بجز LBV متناظر را در سمت چپ خود دارند. این خصوصیت ویژگی یک پوش محدب است وقتی خلاف جهت عقربه‌های ساعت روی آن حرکت کنیم. بنابراین یک شکل (زنجیر) محدب بر روی $c_1(e_i)$ ها ($1 \leq i \leq n$) درست می‌کنیم چون $c_1(e_i)$ ها پشت سر هم هستند کار با ساخت یک شکل محدب به صورت قدم به قدم و افزایشی انجام می‌گیرد. این شکل محدب مسلماً باید رئوس محدب $c_1(e_i)$ ها را در سمت چپ خود داشته باشد و قدم به قدم با رسیدن به یک رأس محدب جدید باید بروز شود تا LBV های صحیح انتخاب شوند. متعاقباً به طور دقیق استفاده و ساخت این شکل محدب را بیان می‌کنیم (به شکل ۳.۲ نگاه کنید).

$WVP(\overline{uw})$ را در نظر بگیرید از روی آن یک چندضلعی جدید به این صورت می‌سازیم که از هر ضلع-انعکاسی e_i قسمت $v_1(e_i)v_2(e_i)$ را حذف می‌کنیم و دو پاره‌خط $v_1(e_i)q'(e_i)$ و $v_2(e_i)q'(e_i)$ را به چندضلعی اضافه می‌کنیم. این چند ضلعی را با علامت $TP(\overline{uw})$ ^۶ نشان می‌دهیم. همانطور که در شکل ۴.۲ می‌بینید TP لزوماً یک چندضلعی ساده نیست و پیچیدگی آن خطی از همان مرتبه‌ی پیچیدگی \mathcal{P} است.

^۴Tracing Polygon



شکل ۴.۲: این شکل نشان دهنده‌ی یک نمونه از ساختار $TP(\overline{uw})$ است که برای تشخیص رئوس LBV برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی استفاده می‌شود. رئوس محدب \mathcal{P} هستند. p_1, p_2, \dots, p_6

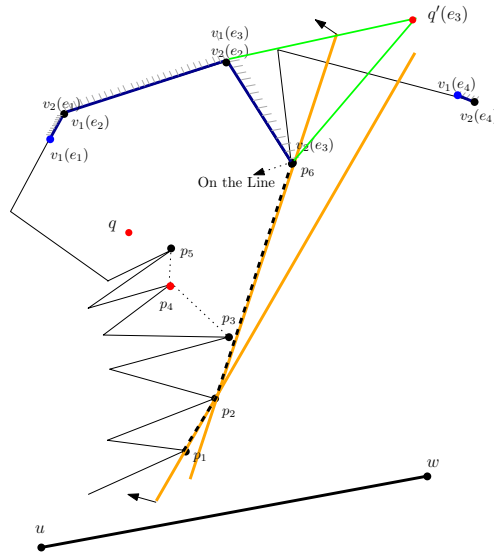
حال از u شروع می‌کنیم و $TP(\overline{uw})$ را در جهت ساعتگرد پیمایش می‌کنیم. همزمان با پیمایش، با استفاده از الگوریتم $Graham$ [۱۴]، بر روی رئوس محدب \mathcal{P} که ملاقات می‌شوند یک شکل محدب می‌سازیم. خود u را به عنوان یک رأس محدب در نظر می‌گیریم که باید روی شکل محدب قرار بگیرد. از آنجا که در استفاده از الگوریتم $Graham$ ترتیب نقاط مشخص است، زمان ساخت شکل محدب مذکور خطی خواهد بود.

هر وقت که به یک رأس محدب جدید رسیدیم خطی که حاوی جدیدترین یال ساخته شده از شکل محدب هست را در یک پشته به نام S میریزیم. این پشته را به طور مداوم بروز کرده و پیش می‌رویم. آخرین خط بالای پشته را l می‌نامیم. زمانی که در پیمایش به $q'(e_i)$ رسیدیم آن را با l مقایسه می‌کنیم. اگر $q'(e_i)$ در سمت راست l قرار بگیرد. L را از پشته برمی‌داریم (pop می‌کنیم). در غیراینصورت چنانچه $q'(e_i)$ بر روی l و یا سمت چپ l قرار بگیرد l را به عنوان خط انتهایی شده برای e_i برمی‌گزینیم که با $cl(i)$ آن را نمایش می‌دهیم. سپس l ($Top(S)$) با نقاط $q'(e_{i+1})$ و $q'(e_{i+2})$... بررسی می‌شود که آیا خط انتخابی آن‌ها خواهد بود یا نه. و اگر نبود از پشته خارج می‌شود. اگر در پیمایش به $q'(e_i)$ رسیدیم و پشته خالی بود آنگاه قرار می‌دهیم $LBV(e_i) = v_1(e_i)$.

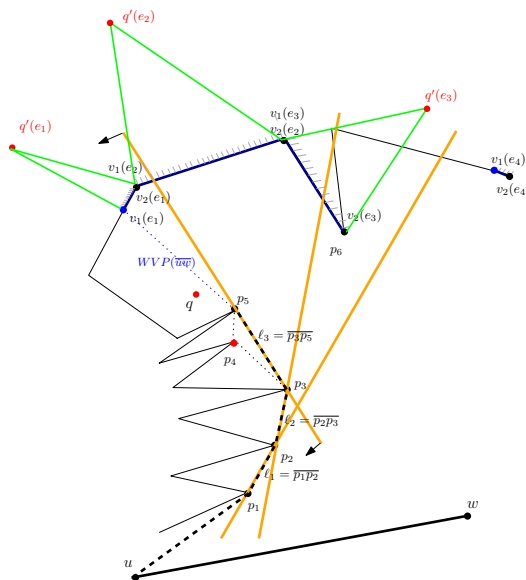
وقتی که به یک رأس محدب جدید برسیم شکل محدب و پشته هر دو بروز می‌شوند و الگوریتم ادامه می‌یابد (به شکل ۵.۲ نگاه کنید).

شکل ۶.۲ یک مثال را نشان می‌دهد. در این شکل زمانی که پیمایش به $v_1(e_1)$ میرسد پشته شامل سه خط است l_1 و l_2 و l_3 که بالای پشته قرار دارد. در واقع $q'(e_1)$ با l_3 مقایسه می‌شود تا ببیند که $q'(e_1)$ در سمت چپ یا راست است. اگر $q'(e_1)$ در سمت راست l_3 بود آنگاه l_3 با $q'(e_1)$ مقایسه می‌شود. که در این شکل $cl(1) = l_3$.

برای هر ضلع-انعکاسی e_i دو رأس محدب $cl(i)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید آن‌ها را به ترتیب پادساعتگرد روی



شکل ۵.۲: بروز شدن شکل محدب در حین پیمایش $TP(\overline{uw})$ هنگامی که به رئوس محدب جدید می‌رسیم. p_5 به عنوان $LBV(e_1)$, p_3 و p_2 به ترتیب به عنوان $LBV(e_2)$ و $LBV(e_3)$ انتخاب می‌شود. اگر u را برای چهارمین ضلع-انعکاسی در نظر بگیریم، ابتدا p_1 را انتخاب می‌کنیم. اما، بعداً باید $v_1(e_4)$ را به عنوان $LBV(e_4)$ انتخاب کنیم، چرا که p_1 نمی‌تواند دیدپذیری e_4 را مسدود کند.



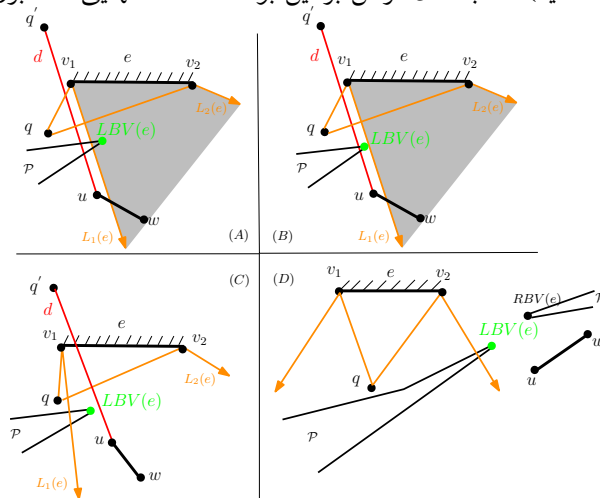
شکل ۶.۲: ساختن شکل محدب برای یافتن رئوس LBV برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی. رئوس p_1, p_2, p_3, p_5 و p_5 رئوس محدبی هستند که در ساخت شکل محدب استفاده شده‌اند. چهار ضلع-انعکاسی e_1 تا e_4 نمایش داده شده‌اند. در این شکل، $LBV(e_1)$ برابر با p_5 می‌شود.

شکل محدب re_1 و re_2 بنامیم. اگر $q'(e_i)$ در سمت چپ $cl(i)$ قرار بگیرد، آنگاه $LBV(e_i) = re_2$. در غیر اینصورت، بر روی $cl(i)$ قرار می‌گیرد که $LBV(e_i) = re_1$ می‌شود.

رئوس RBV نیز به صورت مشابه ولی با پیمایش پادساعتگرد چندضلعی $TP(\overline{uw})$ با شروع از w محاسبه می‌شوند.

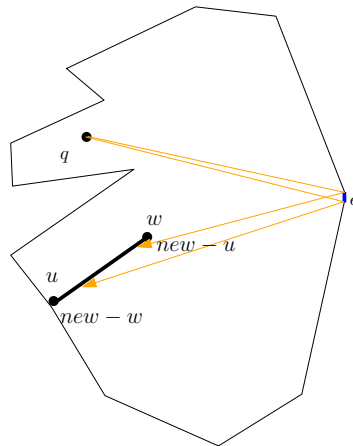
در نهایت، برای هر ضلع-انعکاسی e_i آن رأس انتخاب شده به عنوان $LBV(e_i)$ با پاره‌خط $d = q'(e_i)u$ مقایسه می‌شود، چنانچه $LBV(e_i)$ در سمت چپ خط d قرار گرفته بود و یا اگر $LBV(e_i) = u$ بود، آنگاه $LBV(e_i)$ به طور قطع نمی‌تواند باعث مسدود شدن ناحیه‌ی دیدپذیر منعکس شده توسط e_i شود و بنابراین قرار می‌دهیم $LBV(e_i) = v_1(e_i)$. بدیهی است که به طور معادل همین کار را برای رئوس انتخاب شده به عنوان RBV در جهت معکوس انجام خواهیم داد. جهت انجام این کار نیاز است تا چندضلعی $WVP(\overline{uw})$ در هر دو جهت پیمایش شود. از حالا به بعد می‌دانیم که چنانچه برای یک رأس انعکاسی e رئوس LBV یا RBV وجود نداشت، $LBV(e) = v_1(e)$ و یا به طور معادل $RBV(e) = v_2(e)$ است. توجه کنید که موقعیت رئوس RBV باید با نیم‌خط‌های $q'(e_i)w$ مقایسه شود.

لازم به ذکر است که ممکن است حالاتی وجود داشته باشد که رأس $LBV(e)$ مطابق تعریف ۱.۲ وجود دارد، اما در سمت چپ $d = q'(e_i)u$ قرار دارد. در چنین حالتی، $LBV(e)$ حتی به صورت جزئی مانع دید هیچ قسمتی نمی‌شود. برای این چنین حالت‌هایی، $LBV(e)$ را برابر با $v_1(e)$ قرار می‌دهیم. لیکن، $LBV(e)$ ممکن است بین d و $L_1(e)$ قرار گرفته باشد. که این مورد در بخش ۴.۲ بررسی شده است. دقت کنید که $L_1(e)$ خود ممکن است در سمت چپ یا راست d قرار گرفته باشد (به شکل ۷.۲ نگاه کنید). تا به حال فرض بر این بود که نقاط انتهایی \overline{uw} بر روی مرز \mathcal{P} قرار دارند، اما اگر



شکل ۷.۲: در این شکل، چهار موقعیت متفاوت برای رئوس LBV نمایش داده شده است. دقت کنید که \overline{uw} تمام v_1v_2 را می‌بیند. شکل (A) حالتی را نشان می‌دهد که LBV در سمت راست هر دوی $d = q'(e)u$ و $L_1(e)$ قرار دارد. در شکل (B)، LBV بین d و $L_1(e)$ قرار دارد. شکل (C) حالتی را نشان می‌دهد که $L_1(e)$ در سمت چپ d قرار گرفته و $LBV(e)$ بین $L_1(e)$ و d واقع شده است. در نهایت شکل (D) حالتی را نمایان کرده که در آن تمام دیدپذیری آینه را مسدود کرده است.

چنین نباشد دو حالت ممکن است رخ دهد که باید الگوریتم آن‌ها را پوشش دهد:



شکل ۸.۲: در این شکل، یک مثال برای موردی زده شده است که ضلع e پاره خط هدف \overline{uw} از پشت می بیند. در چنین شرایطی باید جای نقاط u و w را عوض کنیم و تمام مراحل گفته شده ی فوق را از یکبار دیگر برای پاره خط با جهت معکوس اجرا کنیم. و با این کار اضلاع انعکاس دهنده ای مانند e پیدا می شوند.

۱. قبلا فرض می کردیم که u یا به طور معادل w رأسی از چندضلعی P هستند همچنین فرض کردیم که این ها رؤس محدب باشند. حال باید برای پیمایش $TP(\overline{uw})$ و ساخت شکل محدب از نقاط دیگری بر روی P بجای u و w استفاده شود. برای پیدا کردن نقطه ی معادل u بر روی P در جهت پادساعتگرد با شروع از $v_1(e)$ حرکت می کنیم تا اینکه به نزدیکترین ضلعی از P به u برسیم. سعی می کنیم این ضلع این ویژگی را داشته باشد که یک انتهای آن بالای u انتهای دیگر آن زیر u باشد. یکی از نقاط انتهایی این ضلع را به عنوان u انتخاب می کنیم. برای پیدا کردن یک راس معادل w بر روی P دوباره P را پیمایش می کنیم لیکن در جهت ساعتگرد و با شروع از $v_2(e)$ و به طور مشابه عمل می کنیم.

۲. در چنین مواردی که نقاط انتهایی \overline{uw} روی مرز P نیستند ممکن است یک ضلع - انعکاسی مانند e چنان قرار گرفته باشد که \overline{uw} را از پشت ببیند. به عبارت دیگر زمانی که روی \overline{uw} بایستیم و به سمت e نگاه کنیم، w در سمت چپ ناحیه ی دیدپذیر e قرار خواهد گرفت و u در سمت راست (به شکل ۸.۲ نگاه کنید). باید برای پیدا کردن اضلاعی با این خاصیت u و w را جابه جا کنیم و یکبار دیگه مراحل فوق را اجرا کنیم تا اگر چنین اضلاعی باعث دید شدن \overline{uw} می شوند آنها را کشف کنیم. پس از \overline{uw} بجای \overline{uw} استفاده می کنیم و زمانی معادل $O(n)$ به کل زمان اجرا اضافه می شود. دقت کنید که این اجرا کاملا اضلاع - انعکاسی متفاوتی را پیدا خواهند کرد و مستقل از هم هستند و با یکدیگر تداخل ندارند. علت آن است که یک ضلع - انعکاسی e که \overline{uw} را از پشت می بیند در اجرای اول حذف می شود، چرا که در اجرا نخست که از \overline{uw} استفاده می شود، w در سمت چپ نیم خط $L_1(e)$ قرار می گیرد و e در مرحله ۱ از الگوریتم ۱.۱.۲ حذف می شود.

بدیهی است که همه ی مراحل فوق در مجموع در زمان خطی از n قابل انجام هستند.

۱.۳.۲ تحلیل و اثبات درستی الگوریتم ۳.۲

در این بخش کلیت کار و تحلیل های صحبت نشده تکمیل خواهد شد.

قضیه ۲.۲ فرض کنید P یک چندضلعی ساده با n راس است، q یک نقطه‌ی داده شده داخل P است و \overline{uw} یک پاره‌خط داده شده داخل P است که مستقیماً توسط q دیده نمی‌شود. در این صورت همه‌ی اضلاعی مانند e که بتوانند \overline{uw} را برای e دیدپذیر کنند در زمان $O(n)$ قابل محاسبه هستند.

برای اثبات قضیه بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید که \overline{uw} یک قطر از P است. و ضمن اینکه هیچ ضلعی نمی‌تواند \overline{uw} را از پشت e دیدپذیر کند.

۱. الگوریتم ۳.۲ و تعریف ۱.۲ نشان می‌دهند که رئوس LBV و RBV را میتوان در زمان خطی محاسبه کرد.

۲. الگوریتم ۱.۱.۲ می‌تواند بدرستی برای هر ضلع-انعکاسی e بررسی کند که آیا حداقل یک قسمتی از \overline{uw} را می‌تواند برای ناظر e دیدپذیر کند یا خیر؟ برای اثبات این موضوع دو حالت اول الگوریتم ۱.۱.۲ بدیهی هستند. در حالت سوم یکی از نیم‌خط‌های $L_1(e)$ یا $L_2(e)$ و یا هر دو \overline{uw} را قطع می‌کنند. در این حالت اگر $LBV(e) = p_j$ نیم‌خط $L_2(e)$ را قطع نکرده باشد هیچ رأس دیگری نمی‌تواند دیدپذیری e را به طور کامل مسدود کند. بر فرض خلف که p_l راس دیگری باشد که دیدپذیری ضلع انعکاسی e را مسدود می‌کند. در این حالت پاره‌خط $q'p_l$ در سمت راست $L_2(e)$ قرار دارد و در نتیجه در سمت راست $q'p_j$ قرار دارد که با تعریف LBV برای p_j تناقض دارد و p_j از اول نمی‌توانسته $LBV(e)$ باشد. برای رئوس RBV هم می‌توان بحث مشابهی داشت. همچنین به طور مشابه می‌توان نشان داد که رئوس محدب‌ی از زنجیره‌های چپ یا راست که در پیمایش $WVP(\overline{uw})$ استفاده کردیم می‌توانستند باعث مسدود شدن دیدپذیری اضلاع شوند.

۴.۲ مشخص کردن قسمت‌های دیدپذیر پاره‌خط هدف

در این فصل، با در نظر داشتن یک ضلع-انعکاسی e یک روش بدست آوردن قسمت e -دیدپذیر پاره‌خط هدف، که با علامت \overline{uw} نشان داده شده است، ارائه می‌شود.

لم ۳.۲ یک چندضلعی ساده P با n راس و یک ناظر q و یک پاره‌خط \overline{uw} داخل P داریم. در زمان خطی متناظر با پیچیدگی P می‌توان برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی چون e بازهای از \overline{uw} که e -دیدپذیر است را محاسبه کرد.

نشان می‌دهیم که برای یک ضلع e با داشتن $LBV(e)$ می‌توان در زمان ثابت بازه‌ی e -دیدپذیر \overline{uw} را پیدا کرد و بنابراین برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی زمان خطی مورد نیاز است.

بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید که \overline{uw} دیدپذیر- e است. برای پیدا کردن قسمت e -دیدپذیر \overline{uw} از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

۱.۴.۲ الگوریتم ۱.۴.۲

تعیین قسمت e - دیدپذیر \overline{uw}

فرض کنید که $u'(e)$ و $w'(e)$ به ترتیب متناظر با u و w دو نقطه‌ی انتهایی بازه‌ی e - دیدپذیر بر روی \overline{uw} باشند. از الگوریتم ۲ تمام رئوس LBV و RBV برای همه‌ی اضلاع - انعکاسی را بدست می‌آوریم. دو حالت داریم:

$$1. \text{ اگر: } LBV(e) = v_1(e)$$

آنگاه تقاطع $L_1(e)$ و پاره‌خط \overline{uw} نشان دهنده‌ی $u'(e)$ خواهد بود. اگر $L_1(e)$ در سمت چپ \overline{uw} قرار گیرد، آنگاه u خود برابر با $u'(e)$ خواهد بود.

$$2. \text{ اگر: } LBV(e) \neq v_1(e)$$

آنگاه اگر $LBV(e)$ در سمت راست $L_1(e)$ بود، باز هم محل تقاطع $L_1(e)$ و \overline{uw} تعیین کننده‌ی $u'(e)$ خواهد بود. در غیر این صورت، پاره‌خط $\overline{q'(e)LBV(e)}$ را به سمت \overline{uw} امتداد می‌دهیم تا آن را قطع کند. محل تقاطع نشان دهنده‌ی $u'(e)$ خواهد بود.

به طریقی مشابه نقاط w' محاسبه می‌شوند.

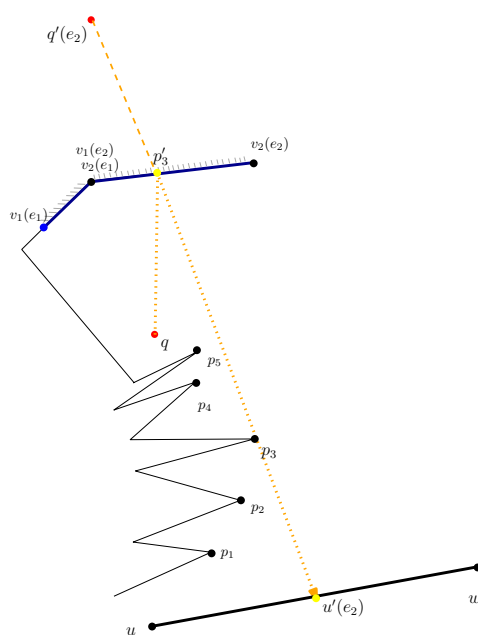
۲.۴.۲ تحلیل الگوریتم ۱.۴.۲

قدم اول الگوریتم بدیهی است چرا که هیچ رأسی مانع دید ضلع - انعکاسی نمی‌شود و این حالت به زمان $O(1)$ نیاز دارد. در حالت دوم اگر $LBV(e)$ بر روی $L_1(e)$ و یا سمت چپ آن قرار بگیرد، از آنجا که از قبل می‌دانیم که \overline{uw} برای ضلع - انعکاسی دیدپذیر بوده است و در واقع $L_1(e)$ سمت راست w نیست، بنابراین کافیت که تداخل $L_1(e)$ با \overline{uw} را بدست آوریم. اگر $LBV(e)$ سمت راست $L_1(e)$ قرار بگیرد، آنگاه از تعریف ۱.۲ می‌دانیم که $LBV(e)$ - دیدپذیر است. حال کافیت نشان دهیم که امتداد $\overline{q'(e)LBV(e)}$ در جهت پاره‌خط هدف یعنی \overline{uw} نقطه‌ی $u'(e)$ را تعیین می‌کند. ممکن است چندین رأس محدب^۷ در سمت راست $L_1(e)$ قرار گرفته باشند. بر فرض خلف اگر $u''(e)$ به u نزدیکتر باشد و در نتیجه‌ی امتداد پاره‌خط $\overline{q'p_j}$ و تداخل آن با \overline{uw} بدست آمده باشد ($p_j \neq LBV(e)$). آنگاه $u''(e)$ باید سمت راست $L_1(e)$ باشد و در نتیجه خط $\overline{q'p_j u''(e)}$ باید سمت راست $LBV(e)$ قرار بگیرد، که با تعریف ۱.۲ در تناقض است (شکل ۹.۲ را ببینید). در اثبات فوق از جهت $L_1(e)$ و همچنین از محل قرارگیری q نسبت به ضلع - انعکاسی e که در سمت چپ e باشد یا سمت راست آن استفاده نشد، لذا اثبات یکسان برای نقاط RBV نیز برقرار خواهد بود.

۵.۲ گسترش چندضلعی دیدپذیر یک پاره‌خط

در این فصل حالت‌های مختلف دیدپذیر کردن دو پاره‌خط که یکدیگر را نمی‌بینند بررسی می‌شود.

^۷reflex vertex



شکل ۹.۲: $p_3 = LBV(e_2)$ ، و تداخل امتداد $\overline{q'(e_2)p_3}$ و \overline{uw} برابر است با $u'(e_2)$.

لم ۴.۲ یک چندضلعی ساده \mathcal{P} و دو پاره خط داخل \mathcal{P} داده شده‌اند. فرض کنید این دو پاره خط به نام \overline{xy} و \overline{uw} باشند. فرض کنید که \overline{xy} و \overline{uw} برای هم دیدپذیر نباشند. برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی، در زمان خطی برحسب پیچیدگی \mathcal{P} ، می‌توان فهمید که آیا \overline{uw} برای \overline{xy} به صورت ضیف یا قوی و یا کامل دیدپذیر-انعکاسی می‌شود یا خیر.

بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کردیم که \overline{xy} ناظر و \overline{uw} پاره خط هدف باشد. برای اثبات لم ۴.۲ از الگوریتم‌های مطرح شده در بخش‌های قبلی استفاده می‌کنیم، بسته به مسئله، نیم‌خط‌های انتخاب شده به عنوان ورودی‌های الگوریتم‌ها متفاوت خواهد بود و از خروجی‌های متناظر هر الگوریتم استفاده می‌شود. بعداً انتخاب‌های متناظر را می‌بینیم. مثلاً در الگوریتم ۱.۱.۲ از اشتراک دو چندضلعی، مثلاً $WVP(\overline{uw})$ و $VP(q)$ استفاده شد تا نقاط $v_1(e)$ و $v_2(e)$ برای هر ضلع-انعکاسی e بدست آید و سپس با کمک این نقاط نیم‌خط‌های $L_1(e)$ و $L_2(e)$ حاصل می‌شوند. بجای $v_1(e)$ و $v_2(e)$ از نقاط متفاوتی بهره گرفته می‌شود. و برای پیدا کردن این نقاط اشتراک چندضلعی‌های دیگری مورد نیاز است. همچنین بجای نیم‌خط‌های $L_1(e)$ و $L_2(e)$ نیز از خطوط متفاوتی استفاده می‌شود. از آنجایی که در این بخش ناظر خود یک پاره خط است به وضوح سختی کار نسبت به قبل بیشتر است.

در کل برای این مسئله ۴ حالت زیر وجود دارد:

۱. تمام \overline{xy} به طور کامل \overline{uw} را ببیند.
۲. تمام \overline{xy} حداقل یک نقطه از \overline{uw} را ببیند.
۳. \overline{xy} به صورت دیدپذیری ضیف \overline{uw} را به طور کامل ببیند.
۴. حداقل یک نقطه از \overline{xy} حداقل یک نقطه از \overline{uw} را ببیند.

برای اینکه توضیح مختصری برای این موارد بدهیم در نظر داشته باشید که در حالت اول همه‌ی نقاط \overline{xy} همه‌ی نقاط \overline{uw} را باید ببینند. در حالت دوم تنها یک نقطه از \overline{uw} کافیسیت توسط تمام نقاط \overline{xy} دیده شوند. حالت سوم موردی است که ممکن است یک نقطه بر روی \overline{xy} نباشد که \overline{uw} را به طور کامل ببیند، لیکن با در نظر گرفتن همه‌ی نقاط \overline{xy} می‌خواهیم مطمئن باشیم که \overline{uw} به طور کامل دیده می‌شود. در حالت چهارم همین که یک نقطه‌ای روی \overline{xy} باشد که یک نقطه از \overline{uw} را ببیند مسئله حل است.

در بخش‌های زیر این حالت‌ها به تفصیل بررسی شده‌اند. بدون کم شدن از کلیت مسئله یک ضلع-انعکاسی e روی P را در نظر بگیرید. در هر زیربخش جایگزین‌های مناسبی برای $v_1(e)$ ، $v_2(e)$ و $L_1(e)$ و $L_2(e)$ ارائه خواهیم داد.

۱.۵.۲ تمام نقاط ناظر به طور کامل پاره‌خط هدف را ببینند.

یعنی باید تمام \overline{xy} به طور کامل \overline{uw} را ببینند. برای اینکه مطمئن شویم که \overline{xy} به طور کامل در دیدپذیری شرکت می‌کند باید $v_1(e)$ و $v_2(e)$ طوری انتخاب شوند که توسط تمام \overline{xy} دیده شوند. به همین دلیل ابتدا، اشتراک چندضلعی‌های دیدپذیر نقاط انتهایی \overline{xy} یعنی x و y را حساب می‌کنیم که در زمان خطی امکانپذیر است. سپس، $CVP(\overline{uw})$ را محاسبه کرده و با پیمایش بر روی آن، قسمت مشترک هر ضلع با چندضلعی دیدپذیر نقاط انتهایی \overline{xy} را پیدا می‌کنیم. بنابراین، برای هر ضلع-انعکاسی e نقاط $v_1(e)$ و $v_2(e)$ پیدا شدند. این عملیات زمان $O(n)$ نیاز دارد.

فرض کنید نقطه‌ی x ناظر باشد، پرتو منعکس شده از $v_1(e)$ را با $L_{1,x}(e)$ و منعکس شده از $v_2(e)$ را $L_{2,x}(e)$ با نشان می‌دهیم. اگر y را به عنوان ناظر در نظر بگیریم $L_{1,y}(e)$ و $L_{2,y}(e)$ به طور مشابه تعریف می‌شوند.

در الگوریتم ۱.۰.۲ بجای $L_1(e)$ از $L_{1,x}(e)$ و بجای $L_2(e)$ از $L_{2,y}(e)$ استفاده می‌کنیم. البته با این فرض که پاره‌خط \overline{xy} در سمت راست ضلع-انعکاس دهنده و x سمت چپ y باشد در غیر صورت بسته به موقعیت آینه و موقعیت نقاط انتهایی \overline{xy} نسبت به هم ممکن است قرار باشد از $L_{1,y}(e)$ به جای $L_1(e)$ و از $L_{2,x}(e)$ به جای $L_2(e)$ استفاده کنیم. شکل ۱.۰.۲ را ببینید. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید حالت اول برقرار است. از آنجا که ضلع e به طور کامل برای \overline{xy} از $v_1(e)$ تا $v_2(e)$ دیدپذیر است، در استفاده از الگوریتم ۱.۰.۲ کافیسیت تنها بررسی کنیم که $L_{1,x}(e)$ در سمت چپ u باشد و $L_{2,y}(e)$ در سمت راست w باشد. (دوباره بسته به موقعیت u و w نسبت به یکدیگر باید نیم‌خط‌هایی که در نقش $L_1(e)$ و $L_2(e)$ هستند با نقطه‌ی مناسب بررسی شوند تا از دید انعکاس دهنده مطمئن شویم).

به دلیلی که در فوق برای حالت اول مشاهده شد، از این به بعد بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌شود که پاره‌خط \overline{xy} در سمت چپ ضلع انعکاس دهنده مورد بررسی یعنی e قرار دارد و پاره‌خط هدف یعنی \overline{uw} نیز در موقعیتی مشابه قرار دارد با این فرض که x سمت چپ y و u نیز سمت چپ w قرار می‌گیرد.

۲.۵.۲ تمام نقاط ناظر حداقل یک نقطه از پاره‌خط هدف را ببینند.

یعنی باید تمام \overline{xy} حداقل یک نقطه از \overline{uw} را ببینند. در این قسمت می‌خواهیم بدانیم آیا هیچ نقطه‌ای روی \overline{uw} می‌توان یافت که برای تمام \overline{xy} -دیدپذیر باشد. می‌توان مانند زیربخش قبل عمل کرد با این تفاوت که اینبار بجای $CVP(\overline{uw})$ باید از چندضلعی دیدپذیر قوی \overline{uw} ($SVP(\overline{uw})$) استفاده کنیم. این چندضلعی قوی به این صورت است که یک نقطه یا بازه

روی \overline{uw} وجود دارد که خاصیت قوی بودن را حفظ می‌کند. این خاصیت اینگونه است که $SVP(\overline{uw})$ بزرگترین چندضلعی است که یک نقطه یا بازه روی \overline{uw} تمام آن چندضلعی را ببیند. این نقطه یا بازه را در نظر می‌گیریم و برای آخرین قدم بررسی می‌کنیم که آیا این بازه با بازهی $u(e)$ تا $w(e)$ اشتراک دارد یا خیر. و اگر اشتراک داشته باشد در واقع \overline{xy} می‌تواند تمام حداقل یک نقطه از \overline{uw} را ببیند.

دقت داشته باشید که از $WVP(\overline{uw})$ نمی‌توان استفاده کرد، چرا که در آن حالت ضلع-انعکاسی از $v_1(e)$ تا $v_2(e)$ ممکن است تنها توسط یک نقطه روی \overline{uw} دیدپذیر ضعیف نباشد. باید از $SVP(\overline{uw})$ استفاده شود. از طرفی در نظر داشته باشید که در این زیربخش هدف آن است که حداقل یک نقطه از \overline{uw} پیدا کنیم که \overline{xy} را به طور کامل ببیند. این نقطه باید تمام ضلع e را از $v_1(e)$ تا $v_2(e)$ ببیند.

توجه کنید که در این قسمت از تمام الگوریتم‌های فوق برای این استفاده کردیم که متوجه شویم آیا \overline{xy} و \overline{uw} دیدپذیر-انعکاسی هستند یا خیر. ولیکن قبل از این بررسی دیدپذیر بودن فارغ از محل دیدپذیری پاره‌خط هدف انجام می‌گرفت. برای محاسبه‌ی u' و w' برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی الگوریتم سوم هم لازم است. در قسمتهای بعدی استفاده بیشتری برای کسب نتیجه‌ی مطلوب خواهیم دید.

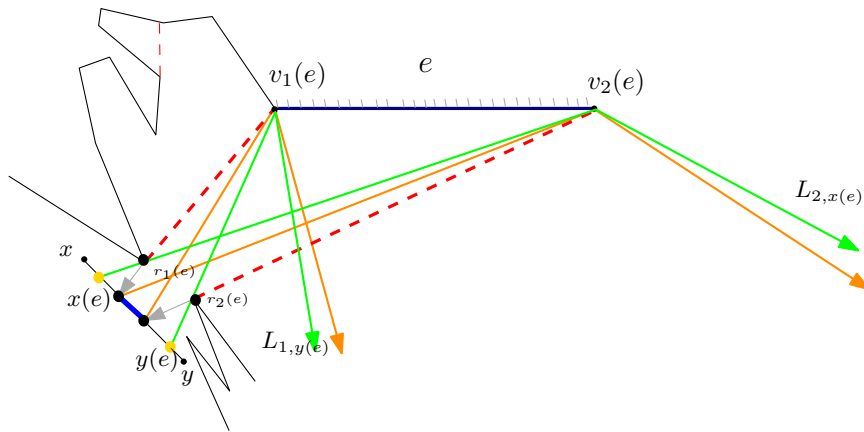
۳.۵.۲ ناظر با دیدپذیری ضعیف تمام پاره‌خط هدف را ببیند.

یعنی باید \overline{xy} با دیدپذیری ضعیف \overline{uw} را به طور کامل ببیند. ممکن است نقطه‌های روی \overline{xy} نباشد که \overline{uw} را به طور کامل از طریق انعکاس ببیند. در این قسمت می‌خواهیم بدانیم که آیا \overline{uw} به طور کامل با در نظر گرفتن تمام نقاط \overline{xy} دیده می‌شود. برای پیدا کردن اضلاع-انعکاسی که پتانسیل دیدپذیر کردن ناظر را دارند اشتراک $WVP(\overline{xy})$ و $CVP(\overline{uw})$ را حساب می‌کنیم و در نتیجه تمامی رئوس v_1 و v_2 برای همه‌ی اضلاعی که پتانسیل دیدپذیری انعکاسی برای ناظر را دارند، پیدا می‌شوند.

از آنجایی که در این بخش با چندضلعی قابل دید ضعیف سروکار داریم، ممکن است با اضلاع-انعکاسی خاصی روبرو شویم که برای هیچ‌یک از نقاط انتهایی \overline{xy} قابل دید نیستند اما برای برخی نقاط میانی این پاره‌خط دیدپذیر هستند. باید این بازه‌های قابل دید برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی پیدا شوند. در حقیقت در این بخش، اضلاع-انعکاسی متفاوت ممکن است از نقاط متفاوتی بر روی \overline{xy} برای بدست آوردن جایگزین‌های مناسب به جای نیم‌خط‌های L_1 و L_2 در الگوریتم ۱.۱.۲ بهره ببرند. به هرصورت، این کافیست که این نیم‌خط‌ها با نقاط انتهایی پاره‌خط \overline{uw} مقایسه شوند که اطمینان حاصل شود که پاره‌خط \overline{uw} به طور کامل پوشش داده می‌شود.

توجه کنید که از آنجا که بازه‌ی قابل دید از پاره‌خط هدف توسط هر ضلع-انعکاسی بدست خواهد آمد، لذا اگر این پاره‌خط کامل پوشیده نشده بود، می‌توان به راحتی پی برد که آیا پاره‌خط هدف می‌تواند توسط بیش از یک ضلع-انعکاسی کاملاً پوشانده شود یا خیر.

فرض کنید بسته به نزدیکی به x یا y برای یک ضلع-انعکاسی خاص به نام e_i دو نقطه‌ی $x(e_i)$ و $y(e_i)$ به ترتیب نقاطی بر روی پاره‌خط \overline{xy} باشند که برای بدست آوردن $L_1(e_i)$ و $L_2(e_i)$ باید استفاده شوند. در واقع از انعکاس پرتوی که از $x(e_i)$ بر روی e_i می‌تابد $L_1(e_i)$ بدست می‌آید و به همین صورت از انعکاس پرتو برآمده از $y(e_i)$ نیم‌خط $L_2(e_i)$



شکل ۱۰.۲: موقعیت نقاط و پاره‌خطها نسبت به یکدیگر و نسبت به ضلع-انعکاس دهنده تعیین کننده‌ی انتخاب درست جایگزین‌های نیم‌خط‌های $L_1(e)$ و $L_2(e)$ در هنگام استفاده از الگوریتم ۱.۱.۲ است. در این شکل همچنین برای ضلع-انعکاس دهنده‌ی e نقاط $x(e)$ ، $r_1(e)$ ، $r_2(e)$ و نشان داده شده‌اند.

بدست می‌آید. که در الگوریتم ۱.۱.۲ از این نیم‌خطها استفاده خواهیم کرد. با استفاده از روشی که در زیر ارائه شده است برای همه‌ی اضلاع-انعکاسی در مجموع، این نقاط در زمان خطی با توجه به پیچیدگی P بدست خواهند آمد.

تعریف ۵.۲ یک ضلع بالقوه انعکاسی e را (از $v_1(e)$ تا $v_2(e)$) در نظر بگیرید، به طوریکه دو رأس محدب^۸ وجود دارند که به ترتیب دیدپذیری یک قسمتی از \overline{xy} را در محل‌های قبل از $v_1(e)$ و بعد از $v_2(e)$ ، با توجه به ترتیب رئوس P ، مسدود کرده‌اند. نام این رئوس را به ترتیب $r_1(e)$ و $r_2(e)$ می‌نامیم. در حقیقت $r_1(e)$ در سمت $v_1(e)$ و $r_2(e)$ در سمت $v_2(e)$ مانع دیدپذیری ناظر شده‌اند.

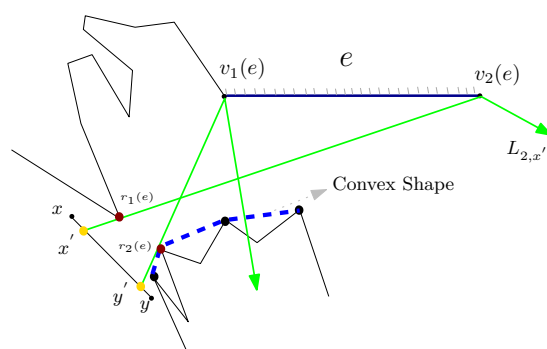
بدیهی است که اگر هر کدام از رئوس $r_1(e)$ یا $r_2(e)$ وجود نداشته باشند، در سمت متناظر مانعی برای دید وجود ندارد و می‌توان از $v_1(e)$ یا $v_2(e)$ برای بدست آوردن نیم‌خط متناسب یعنی $L_1(e)$ یا $L_2(e)$ استفاده کرد.

به شکل ۱۰.۲ نگاه کنید، در این شکل در قالب یک مثال برای یک ضلع-انعکاسی e رئوس $r_1(e)$ و $r_2(e)$ نشان داده شده‌اند. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید که دو نقطه‌ی انتهایی ضلع e همان $v_1(e)$ و $v_2(e)$ باشند. آن بازه‌ی آبی رنگ که یک زیرپاره‌خط از \overline{xy} است، می‌تواند به طور کامل ضلع e را ببیند، اما همه‌ی نقاط \overline{xy} از $x(e)$ تا زیرپاره‌خط آبی رنگ، و از زیرپاره‌خط آبی رنگ تا $y(e)$ نمی‌توانند حداقل بخشی از e را ببینند. برای نقاطی که در سمت دیگر این رئوس زرد رنگ قرار دارند، یعنی بین x و $x(n)$ و بین y و $y(n)$ ، ضلع e در کل دیدپذیر نیست. ناحیه‌ای که بین پرتوهای سبز رنگ منعکس شده^۹ از e قرار دارد، آن ناحیه‌ای است که پاره‌خط \overline{xy} می‌تواند به صورت دیدپذیری ضعیف از طریق e ببیند. آن نیم‌خط‌های سبز منعکس شده را با $L_{1,y(e)}$ و $L_{2,x(e)}$ نشان می‌دهیم.

برای اینکه نقاط $x(e)$ و $y(e)$ را پیدا کنیم، تنها به نقاط $r_1(e)$ و $r_2(e)$ احتیاج داریم. زیرا پاره‌خط‌های $\overline{v_1(e)r_1(e)}$ و $\overline{v_2(e)r_2(e)}$ را در جهت پاره‌خط \overline{xy} امتداد می‌دهیم و نقاط تداخل با این پاره‌خط را پیدا می‌کنیم. این نقاط تداخل همان

^۸reflex vertices

^۹reflected rays



شکل ۱۱.۲: ساخت یک شکل محدب شبیه به شکل - محدب - راست شبیه به آنچه در الگوریتم ۳.۲ ساخت می‌شود.

$x(e)$ و $y(e)$ هستند.

فرض کنید که m ضلع بالقوه انعکاسی داریم. باید همگی $r_1(e_j)$ و $r_2(e_j)$ $1 \leq j \leq m$ را حساب کنیم. ایده بدست آوردن این نقاط شبیه به الگوریتم ۳.۲ است.

محاسبه‌ی رئوس محدب r_1 و r_2 برای همه‌ی اضلاع - انعکاسی

برای محاسبه‌ی این رئوس از دو شکل محدب بر روی کل رئوس \mathcal{P} حذب استفاده می‌کنیم. این دو شکل محدب با پیمایش در دو جهت متفاوت ساخته می‌شوند. از یکی از این شکل‌های محدب برای محاسبه‌ی نقاط r_1 و از دیگری برای پیدا کردن نقاط r_2 بهره گرفته می‌شود. یک ضلع - انعکاسی به نام e را در نظر بگیرید. در اوایل فصل فرض کرده بودیم که پاره‌خط \overline{xy} در سمت چپ e قرار دارد و x سمت چپ y قرار دارد. حال رئوس بین x و $v_1(e)$ را در یک زنجیره‌ای از رئوس نگاه می‌داریم. مانند الگوریتم ۳.۲ از این زنجیره‌ها کمک می‌گیریم و روی رئوس محدب بین x و رئوس v_1 یک شکل محدب به صورت افزایشی در جهت ساعتگرد می‌سازیم. این کار یکبار برای همه اضلاع - انعکاسی انجام می‌شود. این رئوس محدب را رئوس - محدب - سمت - چپ می‌نامیم. خطی که شامل پاره‌خط $\overline{r_1(e)v_2}$ است باید همه‌ی رئوس - محدب - سمت - چپ را در سمت چپ خود داشته باشد. به طور مشابه (در جهت پادساعتگرد از سمت y به رئوس v_2) رئوس - محدب - سمت - راست را تعریف می‌کنیم. خطی که شامل پاره‌خط $\overline{r_2(e)v_1}$ باشد. باید همه‌ی رئوس - محدب - سمت - راست را در سمت راست خود نگه دارد. دقت کنید که نقاط r_1 و r_2 برای یافتن جهت مناسب پرتوهای انعکاس و یافتن نقاط تداخل استفاده می‌شوند، و بنابراین مهم نیست اگر بیش از یک رأس محدب بر روی خطوط شامل $\overline{r_1(e)v_2}$ یا $\overline{r_2(e)v_1}$ باشد (به شکل‌های ۱۱.۲ و ۱۰.۲ نگاه کنید).

در این بخش، از نیم‌خط $L_{1,y(e)}$ در جای $L_1(e)$ و از $L_{2,x(e)}$ به جای $L_2(e)$ استفاده می‌کنیم. همچنین زمانی که از الگوریتم ۳.۲ بهره می‌بریم، برای ساخت $TP(\overline{uw})$ به جای $WVP(\overline{uw})$ باید از $CVP(\overline{uw})$ استفاده کنیم چرا که باید تمام پاره‌خط \overline{uw} دیدپذیر شود.

۴.۵.۲ حداقل یک نقطه از پاره خط ناظر حداقل یک نقطه از پاره خط هدف را ببیند.

یعنی حداقل یک نقطه از \overline{xy} حداقل یک نقطه از \overline{uw} را ببیند. برای این بخش نیز مانند بخش قبل می توان عمل کرد با این تفاوت که برای پیدا کردن اضلاعی که پتانسیل انعکاس مناسب دارند باید از اشتراک $WVP(\overline{xy})$ و $WVP(\overline{uw})$ استفاده کرد. یک ضلع-انعکاسی e در نظر بگیرید برای الگوریتم ۲.۲ از نیم خطهای $L_{1,x}(e)$ و $L_{2,y}(e)$ استفاده می شود. همچنین، از آنجا که کفایت هر نقطه ای از \overline{xy} برای یک نقطه ای \overline{uw} -دیدپذیر شود، در هنگام ساخت چندضلعی $TP(\overline{uw})$ باید از $WVP(\overline{uw})$ استفاده کرد.

۶.۲ جمع بندی فصل

چنانچه داخل یک چندضلعی ساده به نام \mathcal{P} ، بخواهیم که یک ناظر یک پاره خط را که نمی دیده ببیند، می توان از انعکاس-آینه ای اضلاع \mathcal{P} استفاده کرد. بررسی انعکاس-آینه ای هر ضلع به تنهایی به زمان خطی احتیاج دارد، چراکه ممکن است پیچیدگی ناحیه ی دیدپذیر شده خود $\Theta(n)$ باشد. در این فصل نشان دادیم که می توان برای یک ناظر و یک هدف غیرمتحرک انعکاس-آینه ای تمامی اضلاع \mathcal{P} را در زمان خطی بررسی کرد.

دیدیم که دیدپذیری یک پاره خط می تواند به طریق متعددی تعریف شود. در تمامی حالات الگوریتم ارائه شده در زمان خطی کار می کند، لیکن ورودی های متناظر با هر تعریف فرق می کند. این نتیجه در کنفرانس $WALCOM$ [۴۲] و در ژورنال TCS [۴۳] چاپ شده است.

فصل ۳

افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر

یک چندضلعی ساده \mathcal{P} و یک ناظر q داخل آن در نظر می‌گیریم. هدف این است که مساحت چندضلعی دیدپذیر q با کمک اضلاع انعکاسی افزایش یابد.

با توجه به انواع مختلف انعکاس در کل ۸ حالت داریم. که برخی از این حالت‌ها باز است. حالت بهینه‌ی این مسائل زمانی است که تعداد کمینه‌ی اضلاع-انعکاسی برای افزودن مقدار مورد نظر به مساحت دیدپذیر ناظر استفاده شود. چنانچه یک راه‌حل از مسئله را داشته باشیم می‌توان با بررسی ناحیه‌ی اضافه شده به چندضلعی دیدپذیر ناظر، دریافت که آیا مقدار دقیق مد نظر به دید ناظر اضافه شده است یا خیر. و این کار چنانچه برای هر ضلع انعکاسی زمان $O(n)$ مصرف کند و اجتماع هر دو ناحیه‌ی اضافه شده به زمان $O(n)$ نیاز داشته باشد، در کل زمان $O(n^2)$ نیاز خواهد بود. و بنابراین در زمان چندجمله‌ای می‌توان درستی یک راه‌حل^۱ از مسئله را بررسی کرد.

حال با ارائه‌ی یک کاهش از نوع خاصی از مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها^۲ به این حالت از مسئله نشان می‌دهیم که این حالت مسئله در گروه مسائل ان‌پی-کامل است.

مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها شامل n مقدار^۳ صحیح است و بدنبال زیرمجموعه‌ای از این اعداد هستیم که حاصل جمع اعداد این زیرمجموعه برابر با صفر شود. به سادگی می‌توان این اعداد صحیح را مثبت فرض کرد و زیرمجموعه‌ی هدف را طوری پیدا کرد که حاصل جمع اعداد آن برابر با یک عدد داده شده‌ی مثبت T گردد. باید در نظر داشت که مقادیر مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها می‌توانند هر مقداری داشته باشند، مثلاً یک مقدار غیرچندجمله‌ای از n ، و نباید در یک نمونه از این مسئله مقادیر محدود فرض شوند. و در این صورت مسئله در گروه مسائل ان‌پی-کامل قرار خواهد گرفت.

^۱certificate
^۲Subset Sum
^۳value

۱.۳ افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر به یک مقدار دقیق با داشتن نوع انعکاس آینه‌ای

در این بخش نشان می‌دهیم که افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر به یک مقدار دقیق با داشتن نوع انعکاس آینه‌ای یک مسئله‌ی ان‌پی-کامل است. چنانچه مرسوم است مهم‌ترین قسمت این نوع کاهش‌ها ساخت یک چندضلعی برای تبدیل یک مسئله به یک مسئله در گروه ان‌پی-کامل یا ان‌پی-سخت است. که ما در اینجا مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها را انتخاب کرده‌ایم. در ساخت این چندضلعی‌ها برای اینکه مشخص باشد که کاهش در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است، باید نشان داد که چندضلعی ساخته شده برای کاهش دو مسئله (چندضلعی کاهش)، دارای مختصات حقیقی است. یعنی همه‌ی رئوس چندضلعی مختصاتی با اعداد حقیقی دارند. ما نیز در اینجا یک چندضلعی چنان می‌سازیم که در زمان چندجمله‌ای ساخته می‌شود و نشان می‌دهیم که مختصات همه‌ی رئوس استفاده شده در ساخت چندضلعی می‌تواند حقیقی باشد. برای این کاهش باید نشان دهیم که برای هر نمونه از مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها یک نمونه از مسئله‌ی ما وجود دارد. در ادامه یک نمونه از مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها را با علامت $InSS$ نشان می‌دهیم.

۱.۱.۳ چندضلعی کاهش

یک چندضلعی به این صورت می‌سازیم که شامل دو بخش است داخل یک بخش آن ناظر وجود دارد و داخل بخش دیگر اضلاعی مشخص شده است که با انعکاس خود به صورت آینه‌ای^۴، امکان دید بیشتر را به ناظر می‌دهند. در این چندضلعی هر ضلع دیگری بجز این اضلاع مشخص شده هیچ پتانسیلی برای افزودن ناحیه‌ای به مساحت دیدپذیر ناظر ندارد. همانگونه که در شکل ۱.۳ دیده می‌شود ناظر (که با q نشان داده شده است) داخل یک محیط مستطیل شکل قرار دارد. اگر یک خطی موازی با ضلع عمودی مستطیل و گذرنده از q و یک خط افقی گذرنده از q را در نظر بگیریم پرتوهای نور مشخص می‌کند که هیچ ضلعی از مستطیل نمی‌تواند با یکبار انعکاس باعث افزایش دید q شود.

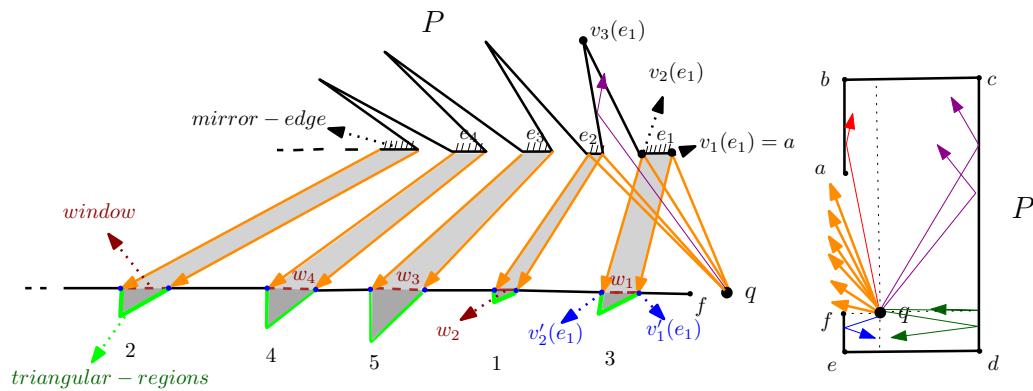
در سمت چپ چندضلعی تمامی اضلاعی که پتانسیل افزایش چندضلعی دیدپذیر q را دارند بر روی یک خط افقی قرار گرفته‌اند و یک خط موازی با این خط پایین‌تر به گونه‌ای قرار گرفته است که q در راستای این خط باشد. با توجه به زاویه تابش پرتوها از q به اضلاع-انعکاسی تعیین شده در روی خط افقی پایین یکسری فضای خالی قرار گرفته است که پرتوهای تابیده شده دقیقاً تمام آن فضا را پوشش می‌دهند.

پاره‌خطی داخل چندضلعی که یک سمت آن مستقیماً توسط ناظر دیده می‌شود و سمت دیگر آن دیده نمی‌شود را پنجره می‌نامند. در این چندضلعی متناظر با هر مقدار نمونه مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها یک ضلع-انعکاسی و یک پنجره مقابل آن وجود دارد که ضلع-انعکاسی متناظر با هر پنجره به طور کامل آن را دیدپذیر-انعکاسی می‌کند.

روند رسمی ساخت چندضلعی کاهش

برای توصیف دقیق چندضلعی کاهش، یک نمونه مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم و آن را $InSS$ می‌نامیم. در این نمونه، i امین مقدار را با علامت $val(i)$ نشان می‌دهیم. مجموع همه‌ی مقادیر تا i امین مقدار، $\sum_{k=1}^i val(k)$ ، را

^۴specular



شکل ۱.۳: چندضلعی کاهش از دو قسمت تشکیل شده است: در قسمت سمت راست آن ناظر قرار دارد و در قسمت سمت چپ آن اضلاع-انعکاسی متناظر با هر مقدار در نمونه مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها وجود دارند. در قسمت سمت راست، ناظر چنان واقع شده که با یک انعکاس^۶ تنها می‌تواند در راستای پاره‌خط af و به سمت بالا ببیند. پاره‌خط‌های ab و ef در یک راستا و موازی با پاره‌خط cd هستند. این اضلاع نمی‌توانند هیچ قسمتی از یک ناحیه‌ی غیر قابل دید را برای ناظر دیدپذیر-انعکاسی کنند. در سمت چپ نیز هیچ ضلعی غیر از اضلاع مشخص شده نمی‌تواند هیچ قسمتی از یک ناحیه‌ی غیر قابل دید را دیدپذیر کند. از آنجا که تعداد n ضلع-انعکاسی نیاز است چندضلعی در زمان چندجمله‌ای قابل ساخت است.

با $sum(i)$ نشان می‌دهیم. چندضلعی کاهش با اجرای مراحل زیر ساخته می‌شود. برای درک بهتر این مراحل به شکل ۲.۳ نگاه کنید.

۱. ناظر را با علامت q نشان داده و آن را در مبدأ قرار می‌دهیم. یعنی در نقطه‌ی با مختصات $(0, 0)$.

۲. محور x را به عنوان خط پایینی قسمت چپ چندضلعی در نظر می‌گیریم.

۳. رئوس سمت چپ، سمت راست و پایینی یک مثلث در پایین قسمت چپ چندضلعی را به ترتیب با علامت‌های $lft(i)$ ، $rlt(i)$ و $blt(i)$ نشان می‌دهیم. این چنین مثلث‌هایی که باید توسط انعکاس دیده شوند و توسط ناظر به طور مستقیم دیده نمی‌شوند، تیرک یا تیکه^۷ می‌نامیم. هر کدام از رئوس تیرک‌ها (مثلث‌های پایینی) را در مختصات تعیین شده زیر قرار می‌دهیم:

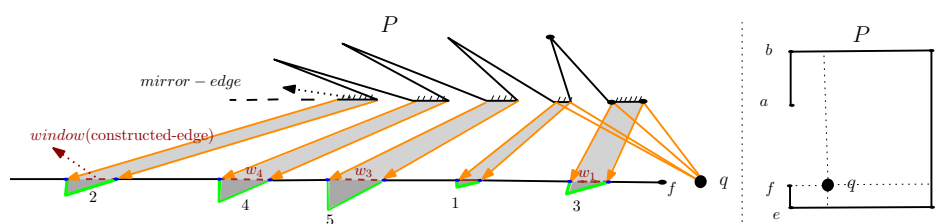
$$lft(i) = (i + 2(sum(i - 1)), 0)$$

$$rlt(i) = (i + 2(sum(i)), 0)$$

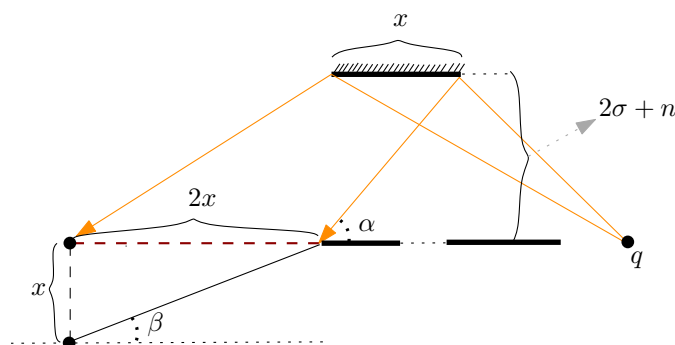
$$blt(i) = (i + 2(sum(i)), -1).$$

۴. اضلاع افقی در سمت بالای قسمت چپ چندضلعی کاهش، موقعیت مناسبی برای قرار دادن اضلاع-انعکاس دهنده‌ی آینه‌ای هستند. آن‌ها را به اختصار اضلاع-آینه‌ای خوانده و مختصات هر کدام را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

^۷spike



شکل ۲.۳: دو قسمت اصلی چندضلعی کاهش در این شکل به نمایش گذاشته شده است.



شکل ۳.۳: نحوه‌ی صحیح قرار دادن مثلث‌های با مساحت‌های متناظر با مقادیر نمونه مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها پشت پنجره‌ها در چندضلعی کاهش.

توجه داشته باشید که i امین ضلع-آینه‌ای بین $(i-1)$ امین و i امین مثلث از مثلث‌های بالا قرار دارد. رئوس سمت چپ و سمت راست i امین ضلع-آینه‌ای را به ترتیب $lm(i)$ و $rm(i)$ می‌نامیم و مختصات آن‌ها را به این صورت مشخص می‌کنیم:

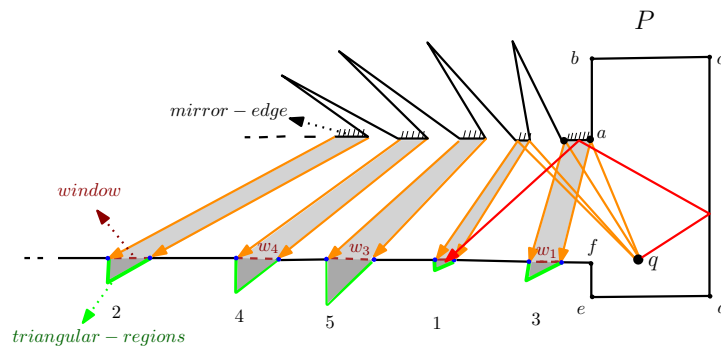
$$lm(i) = \left(\frac{(i+2(\text{sum}(i-1)))}{4}, 2(\text{sum}(n) + n) \right)$$

و

$$rm(i) = \left(\frac{(i+2(\text{sum}(i)))}{4}, 2(\text{sum}(n) + n) \right).$$

۵. رأس بالای هر مثلث در بالای قسمت چپ چندضلعی کاهش را با علامت $ut(i)$ نشان داده و مختصات آن را به این صورت قرار می‌دهیم: $ut(i) = \left(\frac{(i+2(\text{sum}(i)))}{4}, 4(\text{sum}(n) + 2n) \right)$.

همانطور که دیدیم ناحیه‌ی پشت هر پنجره یک مثلث است. فرمول‌های مشخص شده زیر تضمین می‌کند که تمامی رئوس چندضلعی دارای مختصات حقیقی هستند. برای درک بهتر این فرمول‌ها به شکل ۳.۳ نگاه کنید. بدیهی است که مختصات رئوس قسمت راست چندضلعی کاهش می‌توانند حقیقی باشند. اما برای رئوس قسمت چپ چندضلعی اگر قرار باشد یک مثلث به مساحت x زیر یک پنجره قرار دهیم، کفایت یک مثلث قائم‌الزاویه به ارتفاع ۱ و عمق $2x$ به طریق نشان داده شده در شکل ۳/۳ زیر پنجره‌ی مورد نظر اضافه کنیم. در این شکل تعداد مقادیر با n و مجموع کل مقادیر با σ نشان داده شده است. اگر فاصله‌ی بین هر دو مثلث پایین چندضلعی را ۱ در نظر بگیریم، باید ارتفاع قسمت چپ چندضلعی کاهش P را



شکل ۴.۳: چندضلعی کاهش ساخته شده برای مسئله‌ی گسترش چندضلعی دیدپذیر در حضور انعکاس آینه‌ای چندگانه کار نمی‌کند و ان‌پی-کامل بودن این نسخه از مسئله هنوز مشخص نیست. نسخه‌ی انعکاس-چندگانه‌ی آینه‌ای مسئله هنوز باز است.

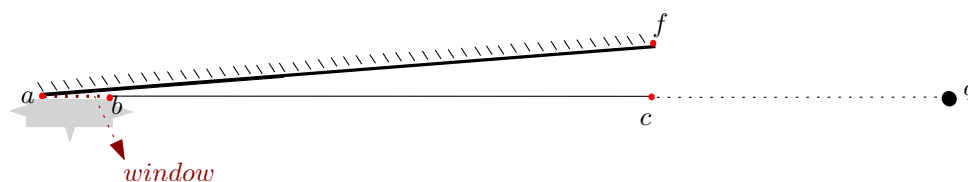
$2n + \sigma$ بگیریم. توجه کنید که باید $\beta < \alpha$ باشد تا کاهش به درستی کار کند.

در مراحل کاهش طبق فرمول‌های فوق مثلث‌های پشت پنجره‌ها (تیرک‌ها) از چپ به راست متناظر با هر مقدار نمونه مسئله جمع-زیرمجموعه‌ها طوری قرار می‌گیرند که مساحت مثلث برابر با مقدار متناظر در نمونه مسئله داده شده شود. بدیهی است که این کار در زمان خطی از n امکان‌پذیر است. و بنابراین ساخت چندضلعی متناظر با هر نمونه مسئله داده شده از جمع-زیرمجموعه‌ها در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است.

باید در نظر داشت که در سمت راست چند ضلعی مستطیل ساخته شده به راحتی می‌تواند با مختصات صحیح ساخته شود.

این مسئله برای زمانی که انعکاس-چندگانه مد نظر باشد نیز بررسی شده اما تا کنون نتیجه‌ای حاصل نشده است و مسئله در حالت انعکاس-چندگانه باز^۸ است. به شکل ۴.۳ نگاه کنید. در کاهش‌ی که مطرح شد، پشت هر پنجره یک شکل مثلثی قرار دارد که تنها و تنها می‌تواند توسط یک ضلع-آینه‌ای دیدپذیر-انعکاسی شود و هیچ ضلعی-آینه‌ای نمی‌تواند هیچ نقطه‌ای از مثلثی پشت یک پنجره‌ی دیگر بجز پنجره‌ی متناظر خودش را دیدپذیر-انعکاسی کند. خط قرمز نشان داده در شکل ۴.۳ نشان می‌دهد که در چندضلعی کاهش مطرح شده ساختار چندضلعی به گونه‌ایست که در حالت انعکاس-چندگانه این تناظر یک به یک اضلاع-آینه‌ای و پنجره‌ها به می‌خورد. در نظر داشته باشید که حتی اگر مقدار کمی از یک ناحیه‌ی پشت یک پنجره برای ضلع دیگری از P بجز ضلع-آینه‌ای متناظرش دیدپذیر شود، آنگاه حاصل جمع مساحت این چنین مقداری می‌تواند به اندازه‌ی کافی بزرگ شود و کارآمدی عملیات کاهش را از بین ببرد. حتی با ۲ انعکاس پاره خط \overline{ed} ممکن است باعث شود یک ضلع-انعکاسی در عملکرد دیگری مزاحمت ایجاد کند. همچنین ضلع عمودی سمت چپ چندضلعی کاهش ممکن است باعث ناهماهنگی در تناظر یک به یک دیدپذیری اضلاع-آینه‌ای با پنجره‌های متناظر با آن‌ها شود.

^۸open



شکل ۵.۳: این شکل یک قطعه از چندضلعی کاهش است. و برای کاهش دادن مسئله جمع- زیرمجموعه‌ها به مسئله افزایش چندضلعی دیدپذیر یک ناظر به یک میزان دقیق داده شده، در حضور نوع انعکاس پخش شونده طراحی شده است.

۲.۳ افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر به یک مقدار دقیق در حضور انعکاس پخش شونده

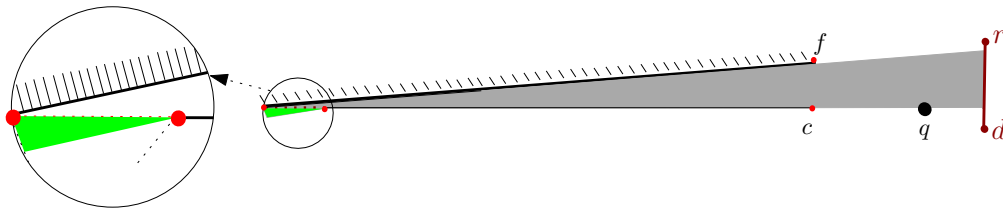
در این بخش نیز هدف افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر به یک مقدار دقیق است. اما، نوع انعکاس مانند یک منبع نور^۹ پخش شونده در همه‌ی جهات تابش می‌کند. این نوع از انعکاس نیم‌صفحه‌ی مقابل هر ضلع-انعکاسی که توسط ناظر دیده می‌شود را دیدپذیر می‌کند.

می‌خواهیم نشان دهیم که این حالت از مسئله نیز در گروه مسائل ان‌پی-کامل قرار می‌گیرد. برای این اثبات باز مسئله‌ی جمع- زیرمجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم و آن را به مسئله‌ی مورد بحث در این بخش کاهش می‌دهیم. بدیهی است که برای برقراری یک تناظر یک‌به‌یک بین یکسری ضلع انتخابی و مقادیر نمونه مسئله جمع- زیرمجموعه‌ها داده شده باید مطمئن بود که هیچ قسمتی از یک ناحیه غیرقابل دید توسط ناظر، توسط ضلعی دیگر دیدپذیر-انعکاسی نخواهد شد، چرا که تناظر یک‌به‌یک بهم خواهد خورد. در این بخش چندضلعی از n قطعه^{۱۰} تشکیل شده است. هر قطعه متناظر با یک مقدار از نمونه‌ی داده شده مسئله جمع- زیرمجموعه‌ها است. هر قطعه شامل یک ضلع خاص است. تنها این ضلع است که پتانسیل دیدن یک ناحیه‌ی غیرقابل دید را برای ناظر فراهم کند. ساختار قطعه مطابق شکل ۵.۳ است. توجه کنید که محل قرارگیری همه‌ی اضلاع در چندضلعی نهائی باید به گونه‌ای باشد که هیچ ضلعی بجز اضلاع-انعکاسی مشخص شده نتوانند باعث افزایش دیدپذیری ناظر شوند.

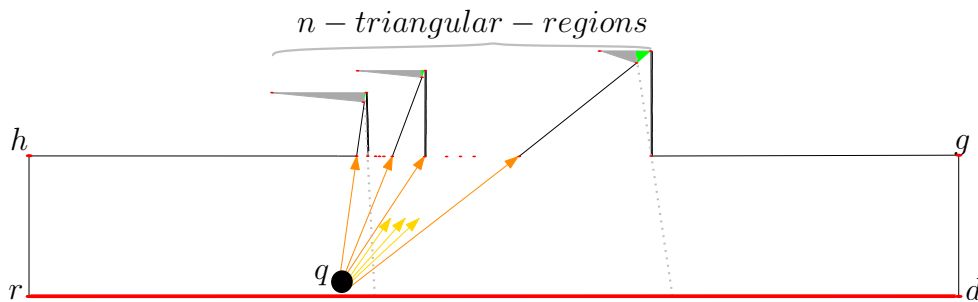
رئوس a, b, c و نقطه‌ی q بر روی یک خط قرار دارند. و پاره‌خط \overline{af} نقش ضلع-انعکاسی را بازی می‌کند. ناحیه‌ای که پشت پنجره قرار دارد تنها باید توسط این ضلع-انعکاسی دیدپذیر شود.

هدف این است تا پاره‌خط \overline{ab} پنجره‌ی هر قطعه باشد، اما چنانچه ضلعی مانند \overline{rd} در شکل ۶.۳ روبروی یک قطعه قرار گیرد، می‌تواند مقداری از ناحیه‌ی پشت پنجره را ببیند. این ناحیه را SMV می‌خوانیم که در شکل ۶.۳ با رنگ سبز نشان داده شده است. قرار است تا مساحت ناحیه‌های SMV برای همه‌ی قطعات طوری تنظیم شود تا مجموع این مساحت‌ها برابر با $1 \ll \epsilon$ شود. شمای کامل چندضلعی کاهش در شکل ۷.۳ نمایش داده شده است. مانند آنچه در چندضلعی کاهش قبل دیدیم، n ناحیه‌ی مثلثی متناظر با هر مقدار نمونه مسئله جمع- زیرمجموعه‌ها در نظر گرفته می‌شود. در یک قطعه رأس جدید ایجاد شده برای تشکیل این مثلث را x می‌نامیم. این رئوس در شکل ۷.۳ با نقاط قرمز نشان داده شده‌اند. این ناحیه‌های مثلثی هر کدام شامل یک ناحیه‌ی SMV هستند. از آنجا که مساحت هر کدام از آن‌ها و همینطور مجموع مساحت کل آن‌ها کمتر از ۱ است، نمی‌توانند در روند کاهش خللی ایجاد کنند. بدین معنا که تنها ضلع \overline{rd} مشخص شده

^۹guard
^{۱۰}gadget



شکل ۶.۳: ناحیه‌ی دیدپذیر کوچک SMV . چنانچه ضلعی مانند پاره‌خط \overline{rd} در مقابل یک قطعه قرار بگیرد، می‌تواند ناحیه‌ی SMV مربوط به آن قطعه را به طور کامل دیدپذیر-انعکاسی کند.



شکل ۷.۳: شمای کامل چندضلعی کاهش برای زمانی که انعکاس از نوع پخش شونده مد نظر است. قسمت پایین چندضلعی یک مستطیل است و قطعه‌ها به ترتیب روی ضلع بالایی این مستطیل واقع شده‌اند.

در شکل ۷.۳ می‌تواند نواحی SMV را دیدپذیر-انعکاسی کند.

می‌توان نشان داد که چندضلعی فوق در زمان چندجمله‌ای قابل کاهش به مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها است و مختصات همه‌ی رئوس حقیقی است. برای نشان دادن این موضوع توصیف رسمی چندضلعی کاهش را در ادامه مطرح می‌کنیم.

توصیف رسمی چندضلعی کاهش در حالت انعکاس پخش شونده

همانطور که مطرح شد در انعکاس نوع پخش شونده فرض شده است که اشعه‌ی ورودی به ضلع-انعکاس دهنده می‌تواند در تمامی زوایای بین 0 و π بازتاب شود. همچنین دیدیم که از آنجا که چنین نوعی از انعکاس می‌تواند باعث ورود اشعه‌های بازتاب شده به تیرک‌های اشتباه شود، و این موضوع حتی در انعکاس چندگانه تشدید خواهد شد، بنابراین باید برای چندضلعی کاهش ساختاری متفاوت از حالت انعکاس-آینه‌ای در نظر بگیریم.

همانگونه که گفته شد ساختار مطرح شده در این بخش برای حالت انعکاس-چندگانه نیز کار می‌کند. ضمناً برای این کاهش همچنان از کاهش مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها به مسئله‌ی خودمان استفاده خواهیم کرد.

مانند چندضلعی کاهش قبلی، نقطه‌ی q را به عنوان ناظر در مبدأ، $(0, 0)$ قرار می‌دهیم. بخش بزرگی از چندضلعی کاهش یک مستطیل است که تقریباً دو سوم آن در سمت راست q قرار دارد (به شکل ۷.۳ نگاه کنید). در بالای این مستطیل

یکسری ساختارهای تشکیل شده از دو مثلث وجود دارد. در این ساختار دو مثلثی، مثلث پایینی که به نام مثلث-دوم^{۱۱} خوانده می‌شود، یک مثلث قائم‌الزاویه است که پایه‌ی آن بر روی مستطیل قرار دارد و ارتفاع آن عمود بر ضلع بالای مستطیل است و بنابراین وتر آن رو به سمت چپ است. مثلث بالایی که به نام مثلث-فوقانی^{۱۲} خوانده می‌شود، به و ط رمعکوس قرا رگرفته است. بدین معنا که پایه‌ی آن، یا ضلع-موازی آن در بالا قرار گرفته است. یکی از رئوس آن رأس بالایی مثلث-دوم است. و رأس دیگر آن در وتر مثلث-دوم ادغام شده است. رأس سوم مثلث فوقانی در سمت چپ پیش می‌رود و هم‌راستا با رأس بالایی مثلث دوم است. پیشرویی این رأس سمت چپ باعث می‌شود که مثلث-فوقانی یک مثلث بسیار باریک باشد. مساحت مثلث-فوقانی i ام برابر است با i امین مقدار در نمونه مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها (val_i).

علامت رسمی برای نشان دادن مثلث-فوقانی i ام T_i و برای نشان دادن مثلث-دوم i ام S_i است. رئوس بالا، چپ و راست S_i را به ترتیب با علامت‌های tS_i ، lS_i و rS_i نشان می‌دهیم. مجموع همه‌ی مقادیر نمونه مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها را با σ نشان می‌دهیم. به طور کلی، مثلث S_i پایه‌ای به اندازه‌ی i واحد دارد و فاصله‌ی پایه‌ی آن را با پایه‌های مثلث‌های S_{i-1} و S_{i+1} به اندازه‌ی $2n^2\sigma$ قرار می‌دهیم. بنابراین مختصات رئوس lS_i و rS_i به صورت زیر است:

$$lS_i = ((2n^2\sigma)\frac{i(i+1)}{4} - i, n^2(n+1)\sigma)$$

و

$$rS_i = ((2n^2\sigma)\frac{i(i+1)}{4}, n^2(n+1)\sigma).$$

برای نشان دادن مختصات یک رأس مثلاً به نام v ، مختصات آن را با دو علامت $x(v)$ و $y(v)$ نشان می‌دهیم. برای بدست آوردن محل رأس tS_i ، یک خط که از نقطه‌ی q آغاز شده و از lS_i عبور می‌کند را رسم کرده، محل تقاطع این خط با خطی عمود بر ضلع بالای مستطیل در نقطه‌ی rS_i محل رأس tS_i را مشخص می‌کند. به طور دقیق مختصات رأس tS_i برابر است با:

$$tS_i = (x(rS_i), n^2(n+1)\sigma + \frac{n^2(n+1)\sigma}{x(lS_i)}).$$

سمت چپ‌ترین و پایین‌ترین رئوس T_i را به ترتیب با علامت‌های lT_i و bT_i نشان می‌دهیم. می‌دانیم که bT_i بر روی وتر S_i ، و lT_i مختصات y ش با tS_i یکسان است. همچنین، رئوس bT_i را طوری قرار می‌دهیم که مجموع مساحت‌های قسمت‌هایی از تمامی مثلث‌های-فوقانی که از ضلع پایینی مستطیل بزرگ (یعنی ضلع \overline{rd}) دیده می‌شوند برابر با مقداری کمتر از ۱ شود. اجازه دهید که bT_i وتر S_i را با نسبت $1 : n^2 - 1$ تقسیم کند. در اینصورت مختصات رئوس bT_i برابر است با:

$$bT_i = (1 + \frac{i(i-1)}{4} + (n^2 - 1)\frac{(x(tS_i) - x(lS_i))}{(n^2)}, n + (n^2 - 1)\frac{(y(tS_i) - y(lS_i))}{(n^2)}).$$

در مرحله‌ی بعد مختصات lT_i را طوری تعیین می‌کنیم که مساحت هر T_i برابر با i امین مقدار از مقادیر نمونه مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها گردد. یادآوری می‌کنیم که این i امین مقدار را با علامت val_i نشان می‌دهیم. مختصات lT_i به صورت زیر است:

$$lT_i = (x(tS_i) - 2\frac{val_i}{y(tS_i) - y(bT_i)}, y(tS_i)).$$

^{۱۱}second triangle^{۱۲}top triangle

در نهایت مختصات مستطیل بزرگی که همه‌ی قطعه‌های^{۱۳} دو-مثلی را بر روی خود حمل می‌کند به قرار زیر است:

$$(-x(rS_n), n^2(n+1)\sigma),$$

$$(-x(rS_n), -1),$$

$$(2(x(rS_n)), -1)$$

و

$$(2(x(rS_n)), n^2(n+1)\sigma).$$

لم ۱.۳. کاهش‌ی که در بخش ۲.۳ مطرح شد، ثابت می‌کند که مسئله‌ی افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر یک ناظر به میزان دقیقاً k واحد توسط انعکاس یگانه‌ی پخش‌شونده در گروه مسائل ان‌پی-کامل است. چندضلعی کاهش مطرح شده دارای مختصات حقیقی است و اندازه‌ی آن‌ها برحسب n چندجمله‌ای است.

اثبات. یک نمونه از مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها به نام $InSS$ بر روی n زیرمجموعه در نظر گرفته و یک چندضلعی به روش مطرح شده در بخش ۲.۳ براساس $InSS$ می‌سازیم. نام این چندضلعی را \mathcal{P} می‌گذاریم.

قبل از هر چیز به سادگی می‌توان متوجه شد که مختصات داده شده حقیقی بوده و برحسب n چندجمله‌ای هستند. علت آن است که $InSS$ یک نمایش خطی از n دارد و همچنین هر قطعه‌ی دو-مثلی از محاسبه‌ی جمعی از مرتبه‌ی $n^4 InSS$ و تداخل تعداد ثابتی^{۱۴} خط و اشعه‌هایی که از چنان نقاطی می‌گذرند مشتق شده است. بنابراین، چندضلعی \mathcal{P} در زمان چندجمله‌ای قابل ساخت است.

قبل از ادامه اثبات، ابتدا نشان می‌دهیم که مساحت T_i برابر است با val_i . اندازه‌ی پایه‌ی T_i برابر است با: $|x(lT_i) - x(tS_i)|$ و ارتفاع آن برابر است با: $|y(tS_i) - y(bT_i)|$. بنابراین مساحت T_i به روش زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} | (x(lT_i) - x(tS_i))(y(tS_i) - y(bT_i)) | \\ &= \frac{1}{2} | (x(tS_i) - 2 \frac{val_i}{(y(tS_i) - y(bT_i))} - x(tS_i))(y(tS_i) - y(bT_i)) | \\ &= val_i. \end{aligned}$$

حال برای اینکه ثابت کنیم که \mathcal{P} یک چندضلعی ساده است، کافی است نشان دهیم که هیچ مثلث-فوقانی چون T_i با T_j یا S_j ($i \neq j$) برخورد نخواهد کرد. به خاطر موقعیت نسبی ساختارهای دو-مثلی متناوب، کفایت نشان دهیم که مختصات x برای lT_i بزرگتر از مختصات x برای tS_{i-1} است. برای نشان دادن این موضوع، ابتدا اثبات می‌کنیم که ارتفاع هر مثلث-دوم از ۱ بزرگتر است. مثلث S_i براساس مختصاتش، شبیه به مثلثی است که از سه نقطه‌ی lS_i ، q و نقطه‌ای با مختصات $(x(lS_i), 0)$ تشکیل شده است. بنابراین ارتفاع S_i برابر است با:

$$\begin{aligned} & i(n^2(n+1)\sigma) / ((2n^2\sigma)^{\frac{i(i+1)}{2}} - i) \\ &= n / (i + 1 - \frac{2}{n^2\sigma}) \end{aligned}$$

^{۱۳}gadgets
^{۱۴}constant

که همیشه حداقل ۱ است.

این بدین معناست که ارتفاع T_i حداقل $\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ است. که این حقیقت را می‌رساند که طول پایه T_i حداکثر برابر است با: $val_i(2n^2)$. از آنجا که رئوس سمت راست مثلث‌های دوم متعاقب در فاصله‌ای معادل با $2n^2\sigma$ دورتر قرار گرفته‌اند، در نتیجه T_i امکان ندارد که با T_{i-1} یا S_{i-1} تداخل کند.

حال نشان می‌دهیم که اگر برای یک k داده شده برای $InSS$ جوابی وجود داشته باشد، آنگاه برای k یک جواب در P وجود دارد. بدین معنا که بزرگ کردن مساحت چندضلعی دیدپذیر q در P به اندازه‌ی دقیقاً k واحد با استفاده از انعکاس یگانه امکان پذیر است. این از آن حقیقت بدست می‌آید که هر T_i دقیقاً به اندازه‌ی $val(i)$ مساحت دارد (اثبات شده در بالا). زیرا به خاطر این حقیقت، اگر i امین زیرمجموعه در یک راه حل از $InSS$ انتخاب شده باشد، می‌توانیم در راه حل مناظر در برای P ارتفاع S_i را تبدیل به یک ضلع-انعکاسی کنیم. در نتیجه q می‌تواند ناحیه (ها) بی‌جدیدی با مساحت k واحد مربع را ببیند.

در نهایت باید درستی کاهش را در جهت معکوس نشان دهیم، بدین معنا که اگر هیچ راه‌حلی برای یک k داده شده در P نباشد، آنگاه راه‌حلی برای k در $InSS$ نیز نخواهد بود. برای اثبات این موضوع، کفایت که نشان دهیم که مجموع مساحت قسمتی از مثلث‌های-فوقانی که توسط پایه‌ی پایینی مستطیل اصلی دیده می‌شوند مقداری کمتر از ۱ است. این موضوع به درستی برقرار است زیرا تنها مناطقی که q نمی‌تواند به طور مستقیم ببیند مثلث‌های-فوقانی هستند و اینکه q برای دیدن این مثلث‌های-فوقانی تنها دو راه دارد: یا دیدپذیری کامل توسط یک انعکاس بر روی ارتفاع مثلث-دوم مناظر و یا دیدپذیری ناقص توسط یک انعکاس بر روی ضلع پایین P . اضلاع چپ و راست مستطیل اصلی P نمی‌توانند هیچ بخشی از T_i را پوشش دهند که این به خاطر فاصله‌ی دور مختصات x این خطوط است. بنابراین، خارج از حالت واضح و منحصر بفرد انتخاب ارتفاع S_i ، انتخاب پایه‌ی P به عنوان یک ضلع-انعکاس دهنده همیشه باعث اضافه شدن یک مقدار جزئی اعشاری اضافه به مساحت دیدپذیری ناظر می‌شود، که تاثیر این قسمت اضافه با صحیح بودن مقدار k تناقض خواهد داشت.

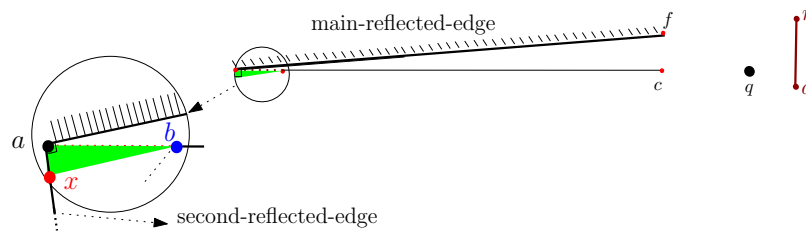
یکی از مثلث‌های S_i را در نظر بگیرید. نقطه‌ای روی ارتفاع S_i که مختصات y یکسانی با bT_i دارد را با علامت a_i نشان می‌دهیم. مثلث کوچکی که توسط این دو نقطه و tS_i ایجاد می‌شود را در نظر بگیرید و آن را U_i بنامید. به طور طبیعی، پایه‌ی U_i و پایه‌ی S_i با یک دیگر موازی هستند، زیرا هر دو با محور x موازی هستند. همچنین از آنجا که نسبت بین $\overline{tS_i}$ و $\overline{tS_i}$ برابر است با: $n^2 : 1$. در نتیجه، نسبت مساحت U_i و S_i برابر می‌شود با: $n^4 : 1$.

محاسبات فوق نشان می‌دهد که مساحت هر S_i برابر است با: $\frac{ni}{2(i+1-\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}\sigma})}$ ، که $\frac{n}{4}$ یک حد بالا^{۱۵} برای آن است. بنابراین، یک حد بالا برای مساحت همه‌ی مثلث‌های U_i در همه‌ی مثلث‌های-دوم برابر است با: $\frac{1}{4n^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{4n^{\frac{1}{4}}}$. کمک محاسبات هندسی ساده می‌توان نتیجه گرفت که برای هر S_i ، یک حد بالا برای مساحت تیکه‌ای از T_i که توسط ضلع پایین P دیده می‌شوند، منطقه‌ای از T_i هست که توسط اشعه‌ای شروع شده از rS_i و گذرنده از bT_i قطع می‌شود. که این منطقه دو برابر U_i مساحت دارد. بنابراین، جمع مساحت تمام قسمت‌هایی از مثلث‌های-فوقانی که توسط پایه‌ی P دیده می‌شوند نمی‌تواند از $\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ تجاوز کند. و این کاهش را کامل می‌کند. ■

کاهش فوق در حالت انعکاس-چندگانه نیز کار می‌کند. نتیجه‌ی زیر را ببینید.

نتیجه ۲.۳. کاهش مطرح شده در بخش ۲.۳:

^{۱۵}upper bound



شکل ۸.۳: در حالت انعکاس چندگانه باید روی دیدپذیری دو ضلع به عنوان ضلع-انعکاس دهنده حساب کرد، که اگر هر کدام از این دو انتخاب شوند مقدار مورد نظر در نمونه مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها انتخاب خواهد شد. این اضلاع af و \overline{ax} هستند.

۱. در حالتی که حداقل تعداد ضلع-انعکاسی مدنظر مسئله باشد نیز کار می‌کند.

۲. در حالتی که انعکاس-چندگانه مدنظر است نیز کار می‌کند. همچنین حالت بهینه‌ی انعکاس-چندگانه نیز در گروه مسائل ان‌پی-سخت است.

اثبات.

برای زمانی که حالت بهینه‌ی مسئله مطرح است، یعنی کمترین تعداد ضلع-انعکاسی مورد نیاز باید پیدا شود. باید هر زیرمجموعه‌ای از اضلاع بررسی شوند، تا زیرمجموعه‌ی بهینه یافت شود و بنابراین بررسی صحت یک راه‌حل^{۱۶} بهینه از مسئله در زمان چندجمله‌ای از n ممکن است امکان‌پذیر نباشد و حالت بهینه‌ی مسئله، در هر دو حالت انعکاس یگانه یا چندگانه، در گروه مسائل ان‌پی-سخت خواهد بود.

انعکاس چندگانه

تنها دو ضلع در چندضلعی برای دیدپذیر کردن یک ناحیه‌ی غیرقابل دید پشت یک پنجره وجود دارد. چنانچه یکی از این دو ضلع انتخاب شوند، ناحیه‌ی غیرقابل دید متناظر انتخاب خواهد شد و در غیر اینصورت هیچ ضلع دیگری با هر تعداد انعکاس نمی‌تواند ناحیه‌ی مذکور را دیدپذیر-انعکاسی کند. برای هر قطعه دو-مثلی این دو ضلع شامل: ضلع-انعکاسی مشخص شده در مثلث‌های-فوقانی یعنی پاره‌خط af و یا ضلعی از مثلث قائم‌الزاویه بالا موازی با پاره‌خط \overline{rd} (یعنی پاره‌خط \overline{ax}) هستند. به شکل ۸.۳ نگاه کنید.

انتخاب هر یک از این دو ضلع در یک قطعه متناظر است با انتخاب مقدار معادل در نمونه‌ی داده شده از مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها. لذا، تا هر تعداد انعکاس این کاهش کار می‌کند و نشان می‌دهد که مسئله در این حالت نیز ان‌پی-کامل است.

^{۱۶}certificate

حالت بهینه‌ی انعکاس - چندگانه

از آنجایی که ضلع - انعکاسی اصلی (پاره‌خط \overline{af}) فقط با تبدیل شدن یک ضلع به ضلع - انعکاسی می‌تواند باعث انتخاب یک مقدار از نمونه مسئله‌ی جمع - زیرمجموعه‌ها شود، اما هر ضلع - انعکاسی \overline{ax} برای عملکرد خود نیاز به تبدیل یک ضلع اضافه از \mathcal{P} (rd) دارد، لذا کاهش قبلی برای این حالت از مسئله کار می‌کند. همچنین در نظر داشته باشید که ناظر (q) خارج از اینکه چند انعکاس میانی مجاز است، تنها از طریق تبدیل یکی از دو ضلع \overline{af} یا \overline{ax} به ضلع - انعکاسی در هر قطعه می‌تواند باعث افزایش دیدپذیری شود. بنابراین باید یکی از این دو ضلع برای افزایش چندضلعی - دیدپذیر ناظر انتخاب شوند و زمانی که کمترین تعداد ضلع - انعکاسی مدنظر است، بررسی تبدیل شدن اضلاع \overline{af} کافیست. ■

۳.۳ افزایش مساحت دیدپذیر تا یک مقدار حداقل

حالت افزایش حداقل چندضلعی دیدپذیر یک ناظر بسیار شبیه به مسئله‌ی مشهور حفاظت از موزه‌ی هنر^{۱۷} است که در سال ۱۹۷۳ توسط Victor Klee به Chvátal نسبت داده شده است [۱۲، ۳۳].

Chvátal در یک قضیه یک حد بالا برای کمترین تعداد منابع^{۱۸} مورد نیاز برای پوشاندن تمام مساحت یک چندضلعی ساده مطرح کرد. و نشان داد که همیشه $\Theta(\frac{n}{3})$ منبع نور برای پوشاندن یک چندضلعی ساده احتیاج و گاهی لازم است. در سال ۲۰۱۷ نشان داده شد که برای چندضلعی‌های متعامد^{۱۹} نیز $\Theta(\frac{n}{3})$ منبع گاهی نیاز است [۱۶]. در سال ۱۹۷۸ Steve Fisk یک اثبات زیباتر برای این نتایج ارائه داد [۴].

در سال ۱۹۸۶ Lee ثابت کرد که مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر یک مسئله‌ی ان‌پی - سخت است [۲۸]. در این اثبات او مسئله‌ی ۳ - صدق‌پذیر^{۲۰} را به مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر تبدیل کرد. او یک چندضلعی ساخت و ثابت کرد که برای هر نمونه مسئله‌ی ۳ - صدق‌پذیر یک نمونه از مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر وجود دارد. او برای این کار یکسری قطعه^{۲۱} طراحی کرد به ازای هر کلز و هر متغییر قطعات متفاوتی طراحی کرد و در یک چندضلعی طوری آن‌ها را قرار داد تا عملیات کاهش در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر شود. در سال ۲۰۱۶ در کنفرانس euroCG [۸] و در سال ۲۰۱۷ با الگوریتمی مناسب‌تر در کنفرانس SoCG یک الگوریتم $O(\log OPT)$ - تقریب با برای مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر ارائه شد [۹]. الگوریتم‌های تقریبی زیادی برای مدل‌های مختلف مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر در سال‌های اخیر ارائه شده است که به برخی از آن‌ها در اینجا ارجاع داده می‌شود [۲۲، ۶، ۲۴، ۷].

در این بخش با تغییر کاهش Lee در مقاله‌ی [۲۸]، مسئله‌ی ۳ - صدق‌پذیری را به مسئله‌ی افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر یک ناظر به یک حداقل مقدار (که این مقدار را با k نشان می‌دهیم)، کاهش خواهیم داد. لازم به ذکر است که در حالت انعکاس پخش‌شونده با هر تعداد انعکاس مجاز (انعکاس - چندگانه) این کاهش کار می‌کند. برای حالت انعکاس

^{۱۷}Art Gallery^{۱۸}guard^{۱۹}orthogonal^{۲۰}3-SAT^{۲۱}gadget

آینه‌ای مسئله هنوز باز^{۲۲} است.

قضیه ۳.۳ یک چندضلعی ساده به نام P و یک نقطه به عنوان ناظر به نام q داخل P و یک مقدار k داده شده است. آیا می‌توان با تبدیل l ضلع از P به اضلاع-انعکاسی، از نوع انعکاس پخش‌شونده، باعث افزایش چندضلعی دیدپذیر q ($VP(q)$) به میزان حداقل k واحد شد.

ادعا ۴.۳ مسئله‌ی مطرح شده در قضیه‌ی ۳.۳ و هم‌میتور نسخه‌ی انعکاس-چندگانه‌ی آن در گروه مسائل ان‌پی-سخت هستند.

اثبات. همانطور که گفته شد، برای اثبات ادعای فوق، از کاهش Lee در مقاله‌ی [۲۸]، استفاده خواهیم کرد. این مقاله مسئله‌ی ۳-صدق‌پذیری را به مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر با حفاظ‌های-رأسی^{۲۳} کاهش داده است. در کاهش اصلی مطرح شده در مقاله‌ی مذکور، برای یک فرمول ۳-صدق‌پذیری داده شده با n متغیر^{۲۴} و m عبارت^{۲۵}، یک چندضلعی ساده به عنوان چندضلعی کاهش ساخته شده است که حداقل به تعداد $n + 3m + 1$ حفاظ-رأسی احتیاج دارد تا به طور کامل پوشیده شود اگر و فقط اگر فرمول ۳-صدق‌پذیری داده شده ارضایپذیر^{۲۶} باشد.

در کاهش اصلی، تیرک‌های متعددی وجود دارد که باید پوشانده شوند و برای پوشاندن این تیرک‌ها، باید رؤس مشخصی را به حفاظ‌های-رأسی تبدیل کنیم تا تمام چندضلعی با تنها $n + 3m + 1$ حفاظ دیده شود. به این رؤس، رؤس-کاندید^{۲۷} می‌گوییم. در ساختار مورد نیاز مسئله‌ی بررسی شده در این بخش، رؤس-کاندید برای حفاظ‌های-رأسی را با ضلع‌های کوچکی به نام اضلاع-انعکاسی عوض می‌کنیم. این اضلاع در شکل ۹.۳ با رنگ قرمز مشخص شده‌اند. همچنین یک ضلع-انعکاسی اضافه در بالا سمت چپ چندضلعی احتیاج است. این ضلع-انعکاسی اضافه محوطه‌ی اصلی داخل P را می‌بیند (جایی که q قرار دارد) و در واقع داخل چهارضلعی‌های پایین چندضلعی و پشت اضلاع-انعکاسی متناظر با هر چهارضلعی را برای ناظر دیدپذیر-انعکاسی می‌کند.

عدد k را برابر با تفاوت مساحت چندضلعی و مساحت $VP(q)$ قرار می‌دهیم. براساس تحلیلی که در مقاله‌ی [۲۸] آمده است، چندضلعی توسط $l = n + 3m + 1$ ضلع-انعکاسی پوشیده می‌شود اگر و تنها اگر فرمول ۳-صدق‌پذیری داده شده ارضایپذیر باشد. ■

انعکاس چندگانه

از آنجا که نواحی خاصی در چندضلعی وجود دارند که فقط توسط اضلاع-انعکاسی مشخص شده قابل پوشیده شدن هستند، باید این اضلاع انتخاب شوند تا بتوان چندضلعی دیدپذیر q را به اندازه‌ی حداقل k واحد گسترش داد. بنابراین، فارغ از اینکه

^{۲۲}open

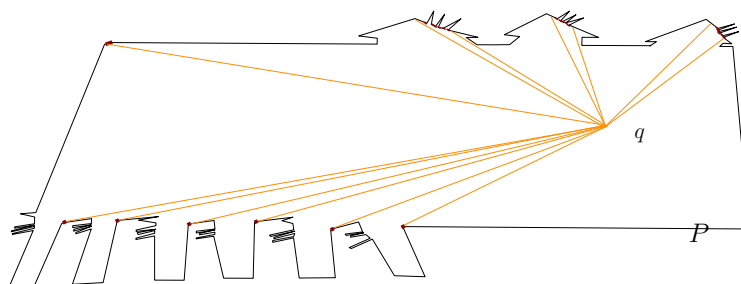
^{۲۳}Vertex-Guards

^{۲۴}Variable

^{۲۵}Clause

^{۲۶}satisfiable

^{۲۷}candidate-vertices



شکل ۹.۳: چندضلعی کاهش تغییر یافته. اضلاع قرمز کوچک اضلاع-انعکاسی هستند. این اضلاع-انعکاسی تنها اشعه‌های رسیده را در سمت روبروی خود منعکس می‌کنند.

چند بار انعکاس بر روی اضلاع مجاز است حداقل آن تعداد مشخص شده از اضلاع-انعکاسی احتیاج است تا $VP(q)$ به اندازه‌ی حداقل k واحد افزایش یابد.

۱.۳.۳ افزایش چندضلعی دیدپذیر توسط یک ناظر داخل یک قیف

در ادامه خواهیم دید که چنانچه چندضلعی داده شده P خود یک چندضلعی-دیدپذیر-ضعیف^{۲۸} یا یک قیف^{۲۹} باشد، در حالت انعکاس پخش‌شونده تنها تعداد ثابتی انعکاس کافیست که تمام چندضلعی داده شده پوشش داده شود.

ابتدا مسئله‌ی افزایش چندضلعی دیدپذیر یک ناظر نقطه‌ای q ($VP(q)$) توسط انعکاس پخش‌شونده و حداقل به اندازه‌ی یک مقدار داده شده k داخل یک قیف \mathcal{F} را بررسی می‌کنیم. هر قیف توسط وتر^{۳۰} خود به طور کامل دیدپذیر-ضعیف است. همچنین یک نقطه به نام هسته-ی اصلی^{۳۱} بر روی وتر هر قیف وجود دارد که می‌تواند تمام چندضلعی را ببیند. بنابراین، یک قیف توسط یک انعکاس پخش‌شونده از راه هسته-ی اصلی خود بر روی وتر به طور کامل دیدپذیر-انعکاسی خواهد شد.

راه‌حل برای انعکاس پخش‌شونده

مانند آنچه در شکل ۱۰.۳ نشان داده شده است، یک قیف \mathcal{F} با رأس^{۳۲} w و وتر به نام \overline{uv} را در نظر بگیرید. زنجیره‌های سمت راست و سمت چپ \mathcal{F} را به ترتیب با علامت‌های Ch_l و Ch_r نشان می‌دهیم. یک ناظر نقطه‌ای پرسشی^{۳۳} به نام q داخل \mathcal{F} می‌تواند تمام وتر را ببیند. وتر می‌تواند از طریق انعکاس بر روی \overline{uv} تمام \mathcal{F} را برای q دیدپذیر-انعکاسی بکند. بنابراین، تنها کافیست یک ضلع تبدیل به ضلع-انعکاسی شود.

برای اینکه بتوانیم نتیجه‌ی بدست آمده را تعمیم دهیم، بر روی انعکاس از طریق وتر \mathcal{F} حساب نمی‌کنیم. این تعمیم

^{۲۸}weak-visible-polygon

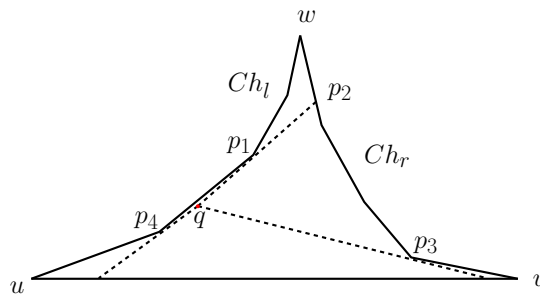
^{۲۹}funnel

^{۳۰}Chord edge

^{۳۱}Kernel

^{۳۲}apex

^{۳۳}query point



شکل ۱۰.۳: در این شکل یک قیف به نمایش گذاشته شده است، که رأس آن w و وتر آن پاره خط \overline{uv} است.

باعث می‌شود که بعداً بتوانیم چندضلعی به شکل دو قیف که از سمت وتر به هم وصال هستند را بهتر مورد بررسی قرار دهیم. حال دوباره فرض کنید که یک نقطه‌ی پرسشی داده شده در \mathcal{F} داریم. دنبال کمترین تعداد ضلع-آینه‌ای هستیم که بتواند با انعکاس خود باعث شوند که q تمام \mathcal{F} را ببیند. بدین منظور ابتدا $VP(q)$ را داخل \mathcal{F} بدست می‌آوریم. بدون کاستی از کلیت مسئله فرض کنید که q به زنجیر سمت چپ \mathcal{F} نزدیکتر باشد. حال اولین نقطه‌ای از Ch_r که برای q دیدپذیر است را p_2 می‌نامیم. خط گذرنده از q و p_2 زنجیر سمت چپ \mathcal{F} را در p_1 قطع می‌کند. همچنین آخرین نقطه‌ای از Ch_r در قسمت پایین زنجیر سمت راستی آن را در نقطه‌ی p_3 قطع می‌کند. به همین صورت آخرین نقطه‌ای در پایین زنجیر چپ که توسط q دیده می‌شود p_4 نام دارد. به شکل ۱۰.۳ نگاه کنید. لم زیر برقرار است:

لم ۵.۳ اگر $VP(q)$ قرار باشد توسط انعکاس یگانه‌ی پخش‌شونده بر روی هر تعداد از اضلاع \mathcal{F} که در $VP(q)$ وجود دارند گسترش یابد، ناحیه‌ی اضافه شده به $VP(q)$ باید زیر مجموعه‌ی ناحیه‌ای باشد که توسط انعکاس بر روی اضلاع شامل نقاط p_1, p_2, p_3 و یا p_4 به $VP(q)$ اضافه می‌شود.

اثبات. به شکل ۱۰.۳ نگاه کنید. یک ضلع از \mathcal{F} که در $VP(q)$ وجود دارد را در نظر بگیرید آن را e بنامید. با توجه به اینکه در یک قیف مسئله را بررسی می‌کنیم، از آنجا که شیب خطوط زنجیره‌های راست و چپ قیف به صورت صعودی یا نزولی است می‌توان مطالب زیر را نتیجه گرفت.

نقطه‌ی بالای تماسی که انعکاس-پخش‌شونده روی e بر Ch_l ایجاد می‌کند، پایین‌تر از نقطه‌ی تماس حاصل از انعکاس-پخش‌شونده بر روی ضلع حاوی p_2 روی Ch_l است.

نقطه‌ی بالای تماسی که انعکاس-پخش‌شونده روی e بر Ch_r ایجاد می‌کند، پایین‌تر از نقطه‌ی تماس حاصل از انعکاس-پخش‌شونده بر روی ضلع حاوی p_1 روی Ch_r است.

نقطه‌ی پایین تماسی که انعکاس-پخش‌شونده روی e بر Ch_l ایجاد می‌کند، پایین‌تر از نقطه‌ی تماس حاصل از انعکاس-پخش‌شونده بر روی ضلع حاوی p_3 روی Ch_l است.

نقطه‌ی پایین تماسی که انعکاس-پخش‌شونده روی e بر Ch_r ایجاد می‌کند، پایین‌تر از نقطه‌ی تماس حاصل از انعکاس-پخش‌شونده بر روی ضلع حاوی p_4 روی Ch_r است.

از آنجایی که این نقاط تماس ناحیه‌ی اضافه شده به $VP(q)$ را تعیین می‌کنند، لم برقرار است. ■

مشاهده ۶.۳ انعکاس-پخش شونده یگانه و یک قیف به نام \mathcal{F} (بدون در نظر گرفتن وتر \mathcal{F}) را به عنوان چندضلعی داده شده در نظر بگیرید. مسئله‌ی یافتن کمترین تعداد ضلع-انعکاسی برای اینکه یک ناظر داده شده داخل \mathcal{F} بتواند \mathcal{F} را به طور کامل ببیند در زمان ثابت حل می‌شود.

اثبات. براساس لم ۵.۳، مسئله‌ی مطرح شده در مشاهده‌ی فوق با بررسی کردن تمام حالات حداکثر چهار ضلع در زمان ثابت امکان‌پذیر است. از این چهار ضلع، دو عدد در Ch_I و دو عدد در Ch_r قرار دارند. ■

۲.۳.۳ افزایش چندضلعی دیدپذیر توسط یک ناظر داخل یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف

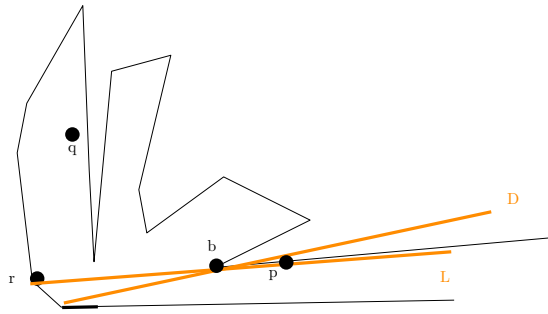
ممکن است نتوان یک نقطه داخل یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف یافت که بتواند تمام آن چندضلعی را ببیند. بنابراین ممکن است یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف یک هسته^{۳۴} نداشته باشد. اما یک وتر در هر چندضلعی دیدپذیر ضعیف وجود دارد که می‌تواند تمام چندضلعی دیدپذیر ضعیف را ببیند.

دو حالت در نظر بگیرید: اول اینکه تمام نقاط یک ضلع-انعکاسی فارغ از اینکه اشعه‌ی تابیده شده به کدام قسمت آن تابیده شده‌اند، بازتاب انجام دهند. برای مثال یک قیف را در نظر بگیرید. در چنین حالتی، ضلع-انعکاسی وتر قیف خواهد بود. از آنجا که وتر قیف تمام آن را دیدپذیر می‌کند، قیف به طور کامل پوشش داده می‌شود. این موضوع به طور کلی برای یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف نیز برقرار است و یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف می‌تواند توسط وترش کاملاً پوشیده شود. حالت دوم آن است که تنها آن قسمتی از یک ضلع-انعکاسی می‌تواند انعکاس انجام دهد که اشعه تابیده شده به آن رسیده است و مابقی آن ضلع-انعکاسی چیزی منعکس نمی‌کند.

مشاهده ۷.۳ اگر تنها انعکاس یگانه مجاز باشد، بهترین انتخاب برای تبدیل یک ضلع از یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف به ضلع-انعکاسی وتر آن چندضلعی دیدپذیر ضعیف است. به عبارت دیگر انتخاب وتر بهترین پاسخ را می‌دهد و بزرگترین قسمت را به چندضلعی دیدپذیر یک ناظر داخل یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف اضافه می‌کند.

اثبات. با فرض خلف، فرض کنید که ضلع دیگری بجز وتر انتخاب بهتری باشد که بتواند پاسخ بهینه را به ما بدهد. نام چنین ضلعی را e بنامید. با داشتن چنین اضلاعی چون e دو نقطه وجود خواهد داشت که یکی را روی e در نظر گرفته آن را r مینامیم و دیگری را p می‌نامیم. نقطه‌ی p به گونه‌ایست که توسط r دیده می‌شود اما توسط قسمتی از وتر که ناظر می‌بیند دیده نمی‌شود. در واقع p یک نقطه کاندید از بخشی از چندضلعی است که توسط e پوشیده می‌شود اما توسط بخش دیدپذیر وتر پوشیده نمی‌شود. همانطور که گفتیم طبق فرض نقطه‌ی r هر دوی p و q را می‌بیند که q ناظر داده شده از ورودی است. بدون کاستی از کلیت مسئله، فرض کنید که p در سمت راست q واقع شده است. به شکل ۱۱.۳ نگاه کنید. حال سمت راست‌ترین نقطه روی وتر را در نظر بگیرید که p را می‌بیند. این نقطه در قسمتی از وتر قرار دارد که توسط q دیده نمی‌شود. نام این نقطه را s می‌گذاریم. فرض کنید که p روی محیط چندضلعی باشد، آن جایی از چندضلعی که مانع شده تا s و q

^{۳۴}kernel



شکل ۱۱.۳: زمانیکه تنها یک انعکاس پخش شونده مجاز است، بهترین انتخاب برای یک ضلع برای گسترش چندضلعی دیدپذیر یک ناظر داخل چندضلعی اصلی، وتر چندضلعی دیدپذیر ضعیف اصلی است. بدیهی است که برای پیدا کردن این پاسخ بهینه به زمان ثابت احتیاج است و برای بدست آوردن ناحیه‌ی اضافه شده به چندضلعی دیدپذیر ناظر به زمان $O(n)$ نیاز است.

یکدیگر را ببینند باید قسمتی باز محیط چندضلعی باشد که بین p و q قرار دارد. رأس محدب‌ی که در این میان تاثیرگذار است را در نظر بگیرید و آن را b بنامید. در شکل ۱۱.۳ ناحیه‌ای از وتر که توسط q دیدپذیر است را با رنگ سیاه به صورت پررنگ‌تر نشان داده‌ایم. خطوط L گذرنده از دو نقطه‌ی r و p و D گذرنده از دو نقطه‌ی b و نقطه‌ی انتهایی سمت چپ قسمت دیدپذیر وتر را در نظر بگیرید. برای اینکه نقطه‌ای با خصوصیات ذکر شده برای p وجود داشته باشد، خط L باید بالای خط D باشد تا p برای قسمت سیاه وتر دیدپذیر نباشد، اما از آنجا که طبق فرض r باید p را ببیند بنابراین p برای قسمت سیاه وتر دیدپذیر می‌شود و وجود چنین نقاطی مانند p نقض می‌شود. بنابراین در زمانیکه چندضلعی مورد بررسی یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف است، بهتر است وتر به یک ضلع-انعکاسی تبدیل شود. ■

۳.۳.۳ انعکاس چندگانه

حالت انعکاس چندگانه برای زمانی که چندضلعی قیف یا دیدپذیر ضعیف باشد نیز بررسی شده است. با اینکه ممکن است تنها بخش کوچکی از ضلع پایه دیده شود، نشان خواهیم داد که حداکثر ۳ انعکاس برای دیدن کل یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف کفایت.

برای پوشاندن کامل یک قیف توسط انعکاس‌های چندگانه، قسمت دیدپذیر وتر قیف به عنوان اولین انعکاس در نظر گرفته می‌شود و این قسمت تبدیل به یک ضلع-انعکاسی خواهد شد. دومین ضلع-انعکاسی را نزدیک‌ترین ضلع به وتر در نظر می‌گیریم. بدیهی است که این ضلع می‌تواند کل وتر قیف مورد نظر را دیدپذیر انعکاسی کند (یادآوری می‌شود که انعکاس از نوع پخش شونده است). مابقی وتر در قدم سوم باید تبدیل به ضلع انعکاسی شود که سومین انعکاس را رقم خواهد زد و چون کل وتر درگیر است تمامی قیف پوشانده خواهد شد. بنابراین یک قیف به طور کامل حداکثر توسط دو ضلع-انعکاسی و از طریق حداکثر سه انعکاس پوشانده خواهد شد. به همین صورت می‌توان نتیجه‌ی مشابهی برای یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف گرفت. لم زیر را ببینید:

لم ۸.۳. برای افزایش دیدپذیری یک ناظر داخل یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف، همیشه یک ضلع وجود دارد که با انعکاس پخش شونده‌ی خود بتواند تمام وتر را دیدپذیر کند. در نتیجه تنها سه انعکاس نیاز است تا تمام چندضلعی دیدپذیر ضعیف پوشیده شود.

اثبات. وتر چندضلعی دیدپذیر ضعیف داده (WVP) شده را با \overline{uv} نمایش می‌دهیم. فرض کنید که u در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بعد از v قرار گرفته باشد. فرض کنید که a نشان دهنده‌ی رأس بعدی روی محیط WVP بعد از u باشد. در اینصورت \overline{au} می‌تواند ضلعی باشد که تمام وتر را دیدپذیر می‌کند. برای اثبات این موضوع، توجه کنید که باید نقطه‌ای (که با علامت p آن را نشان می‌دهیم) روی \overline{av} باشد که v را می‌بیند، در غیر این صورت باید یکبار محیط WVP پاره‌خط \overline{uv} را قطع کند. بنابراین، پاره‌خط \overline{up} تمام \overline{uv} را می‌بیند. در نتیجه لم برقرار است. ■

۴.۳ جمع‌بندی فصل

مسئله‌ی بهینه‌سازی افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر یک ناظر به کمک انعکاس مشابه مسئله‌ی پوشش یک چندضلعی ساده با کمترین تعداد حفاظ است. در این فصل نشان دادیم که همانطور که نسخه‌های مختلف مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر در گروه مسائل ان‌پی-سخت است، نسخه‌های متعددی از مسئله‌ی افزایش ناحیه‌ی دیدپذیر یک ناظر با انواع انعکاس دهنده‌ها در گروه مسائل ان‌پی-سخت است. این اثبات‌ها با کمک کاهش^{۳۵} به مسائل مشهوری همچون مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها و یا ۳-صدق‌پذیری انجام گرفته است. برای هر کاهش یک چندضلعی برای معادل‌سازی دو مسئله به یکدیگر ساخته شده است. به این چندضلعی، چندضلعی کاهش می‌گویند. نشان دادیم که ساخت یک چندضلعی کاهش در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است. مختصات همه‌ی رئوس چندضلعی‌های کاهش را محاسبه شد. در این اثبات‌های حالت‌های انعکاس-یگانه یا انعکاس-چندگانه نیز بررسی شده‌اند. علاوه بر مطالب گفته شده، در این فصل همچنین دیدیم که اگر چندضلعی داده شده‌ی اولیه خود یک قیف یا یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف باشد، می‌توان در زمان چندجمله‌ای و حتی در زمان ثابت با کمترین تعداد انعکاس کل چندضلعی را دیدپذیر کرد.

^{۳۵}Reduction

فصل ۴

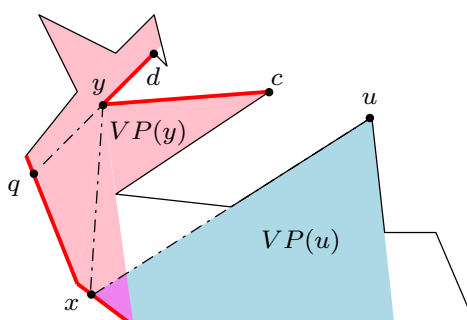
مسئله حفاظت موزهی هنر در حضور انعکاس پخش شونده

در این فصل فرض می‌شود که اضلاع انعکاس پخش شونده دارند. با در نظر گرفتن این فرض، مسئلهی حفاظت موزهی هنر بررسی می‌شود. آنچه در این فصل نشان داده می‌شود، نمونه‌ای است از تفاوتی که از پتانسیلی که انعکاس می‌تواند به دیدپذیری معمولی اضافه کند. در واقع دیدپذیری در حضور انعکاس یک تعمیم بر دیدپذیری معمولی است. یک چندضلعی ساده \mathcal{P} را در نظر بگیرید. هدف دیدپذیری کامل \mathcal{P} توسط حفاظ‌های رأسی هست. پوشش چندضلعی توسط حفاظها در حالی انجام می‌گیرد که r عدد انعکاس پخش شونده برای هر ضلع \mathcal{P} مجاز است. فرض کنید که در حالتی که انعکاس وجود ندارد، یعنی حالت عادی مسئله حفاظت موزهی هنر، مجموعه‌ی کمترین تعداد حفاظ مورد نیاز با S نمایش داده شود. یکی از حفاظها به نام $v \in S$ را در نظر بگیرید. چندضلعی دیدپذیر این رأس $(VP(v))$ باید حداقل شامل یک پنجره^۱ باشد. اگر چنین پنجره‌ای موجود نباشد، \mathcal{P} توسط یک حفاظ به طور کامل پوشیده خواهد شد. یک چنین پنجره‌ای را در نظر می‌گیریم و آن را w می‌نامیم. حال باید یک حفاظ دیگر در S داشته باشیم، به نام u ، به طوریکه w در هر دو چندضلعی‌های دیدپذیر $VP(v)$ و $VP(u)$ باشد. در این حالت یک ضلعی با نام مثلاً e از $VP(v)$ وجود دارد که مجاور با w است که u را می‌بیند. این ضلع باید ضلعی از چندضلعی \mathcal{P} نیز باشد، چراکه پنجره‌ی w خود ضلعی از \mathcal{P} نبود و ساخته شده برای $VP(v)$ بود. بنابراین v می‌تواند u را از طریق انعکاس پخش شونده ببیند. اگر u اگر یک رأس محدب^۲ باشد، آنگاه با یک انعکاس اضافه بر روی هر یک از اضلاع متصل به u ، رأس v می‌تواند تمام $VP(u)$ را ببیند.

قضیه ۱.۴ اگر یک چندضلعی \mathcal{P} (ساده یا با حفره) را بتوان با تعداد بهینه‌ی α عدد حفاظ پوشش داد، آنگاه در حالتی که r عدد انعکاس پخش شونده مجاز باشد، می‌توان همان چندضلعی \mathcal{P} را با $\lceil \frac{\alpha}{1+\lfloor \frac{r}{4} \rfloor} \rceil$ حفاظ پوشش داد.

برای اثبات قضیه‌ی فوق به لم‌های زیر توجه کنید:

^۱window
^۲convex vertex



شکل ۱.۴: چندضلعی دیدپذیر نقطه‌ی y ($VP(y)$) از طریق چهار انعکاس پخش شونده برای u دیدپذیر است. اضلاع-انعکاسی با رنگ قرمز نشان داده شده‌اند.

لم ۲.۴ فرض کنید P بگونه‌ای باشد که نتوان تنها با یک حفاظ آن را به طور کامل پوشش داد. آنگاه برای هر مجموعه‌ی بهینه‌ی S از حفاظهای رأسی که P را کامل پوشش دهد، برای هر رأس $u \in S$ ، یک رأس $v \in S$ وجود دارد که u و y می‌توانند از طریق یک انعکاس پخش شونده یکدیگر را ببینند. علاوه بر این، u و v می‌توانند چندضلعی‌های دیدپذیر یکدیگر را توسط چهار انعکاس پخش شونده ببینند.

اثبات. یک رأس از P در نظر بگیرید. آن را u می‌نامیم. از آنجایی که طبق فرض u نمی‌تواند تمام P را ببیند، $VP(u)$ حتماً شامل حداقل یک پنجره است. این پنجره دیواره‌ی P را در نقطه‌ای با نام x قطع می‌کند، که x نشان دهنده‌ی رأسی از $VP(u)$ است (شکل ۱.۴ را ببینید). از آنجایی که طبق تعریف چندضلعی دیدپذیر یک فضای بسته است، بنابراین چندضلعی دیدپذیر یک رأس دیگر، مانند y ، باید شامل x و یک ناحیه غیرتهی از اطراف x باشد. در نتیجه اگر ضلعی از P که شامل x باشد را تبدیل به یک ضلع-انعکاسی کنیم، آنگاه از طریق انعکاس پخش شونده بر روی این ضلع، u می‌تواند y را ببیند.

دو ضلع از چندضلعی در y متقاطع هستند. y حداقل یک منطقه‌ی کوچک از اطراف x را می‌بیند، در نتیجه ناحیه‌ی کوچکی از یکی از دو ضلع اطراف y توسط x دیده می‌شود. چنانچه x قسمتی از هر دو رأس را ببیند، آنگاه با انعکاس پخش شونده از طریق هر دوی این ضلع‌ها، u می‌تواند $VP(y)$ را به طور کامل ببیند. حال، تصور کنید که x تنها بخشی از یکی از اضلاع را ببیند، آن ضلع را \overline{yc} می‌نامیم. ضلع دیگر را \overline{yd} می‌نامیم، که d رأسی در انتهای دیگر ضلع \overline{yd} از P است. اشعه‌ی \overrightarrow{dy} را ادامه دهید تا زمانیکه بدنه‌ی P را در نقطه‌ای قطع کند. نام این نقطه را q می‌نامیم (شکل ۱.۴ را ببینید). حال، یک نقطه داخل ضلعی که شامل نقطه‌ی q هست، خیلی نزدیک به q ، از طریق \overline{yc} دیدپذیر است. بنابراین از طریق ضلعی از چندضلعی که شامل c است، \overline{yd} توسط سه انعکاس پخش شونده برای u دیدپذیر است. در نتیجه، با تبدیل \overline{yd} به ضلع-انعکاسی، $VP(y)$ توسط چهار انعکاس پخش شونده برای u دیدپذیر خواهد شد. ■

حال یک گراف به نام G به صورت زیر می‌سازیم: رئوس داخل S را به عنوان رأس‌های G در نظر می‌گیریم. دو رأس از G را به یکدیگر وصل می‌کنیم اگر و فقط اگر یا به صورت مستقیم و یا توسط حداکثر یک انعکاس بتوانند یکدیگر را ببینند. در این صورت لم زیر برقرار است:

لم ۳.۴ گراف G همبند است.

اثبات. دو حفاظ از حفاظهای داخل مجموعه‌ی S را در نظر بگیرید و نام آن‌ها را g_i و g_j بنامید. یک مسیر داخل چندضلعی

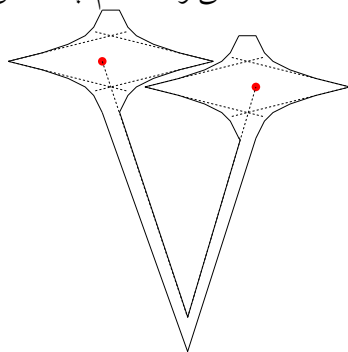
از g_i به g_j رسم کنید و آن را Π بنامید. این مسیر از $VP(g_i)$ شروع می‌شود و در انتها به $VP(g_j)$ ختم می‌شود. از آنجایی که S تمام \mathcal{P} را پوشش می‌دهد، همواره Π از میان چندضلعی‌های دیدپذیر همجواره حفاظهای داخل S عبور خواهد کرد و از میان دو چندضلعی دیدپذیر عبور نخواهد کرد مگر اینکه از محل تقاطع آن‌ها عبور کند. این بدین معناست که با توجه به لم ۴/۲ و همچنین طبق تعریف گراف G ، اگر Π از چندضلعی‌های دیدپذیر دو حفاظ در S عبور کند رأس‌های متناظرشان در V مجاور هستند. بنابراین، یک مسیر گرافیکی بین هر جفت رأس از G وجود دارد. در نتیجه، G همبند است. ■

یک راه‌حل بهینه به نام S برای مسئله‌ی حفاظت موزهی هنر در نظر بگیرید که چندضلعی \mathcal{P} را پوشش می‌دهد. داریم $|S| = \alpha$. یک گراف G بر روی رئوس موجود در S بسازید و بین هر دو رأس از G یک یال رسم کنید اگر و فقط اگر این حفاظها بتوانند یکدیگر را به طور مستقیم یا از طریق یک انعکاس پخش شونده ببینند. براساس لم ۴/۳ گراف G همبند است. حال یک درخت پوشا برای G بدست آورید و نام آن را T بگذارید. یک رأس T را به عنوان ریشه درخت انتخاب کنید. i امین سطح از T را با L_i نشان می‌دهیم. یک عدد داده شده k را در نظر بگیرید. سطوح T را به $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1$ دسته^۳ به گونه‌ای قرار دهید که هر دسته‌ی C_i شامل رئوسی از T باشد که در سطح‌های $L_{i+x(1+\lfloor \frac{k}{4} \rfloor)}$ باشند که $x \in \mathbb{Z}^+$. طبق اصل لانه کبوتری^۴، یکی از این دسته‌ها باید حداکثر $\lceil \frac{\alpha}{1+\lfloor \frac{k}{4} \rfloor} \rceil$ رأس داشته باشد. براساس لم ۴/۲ هر کلاس C از رئوس T را که در نظر بگیرید تمام \mathcal{P} توسط رئوس C پوشیده خواهد شد. بنابراین درستی قضیه‌ی ۱.۴ نتیجه می‌شود.

نتیجه ۴.۴ کران ذکر شده در بالا، برای حالتی که حفاظها روی نقطه‌ای از محیط چندضلعی قرار بگیرند نیز برقرار است.

اثبات. از آنجا که لم‌های ۲.۴ و ۳.۴ برای حفاظهای روی محیط چندضلعی هم معتبر هستند، اثبات قضیه‌ی ۱.۴ نتیجه فوق را نیز به همراه دارد. ■

لازم به ذکر است که کران فوق‌الذکر برای حفاظهای نقطه‌ای برقرار نیست. برای روشن شدن این موضوع به شکل ۲.۴ نگاه کنید. دو حفاظی که به رنگ قرمز نشان داده شده‌اند، می‌توانند تمام چندضلعی را پوشش دهند. به وضوح در حالتی که



شکل ۲.۴: دو حفاظ که نمی‌توانند توسط یک حفاظ جایگزین شوند، گرچه انعکاس مجاز است.

حداکثر یک انعکاس مجاز باشد، اگر بخواهیم این دو حفاظ را با یک حفاظ جایگزین کنیم، این حفاظ جدید باید در جایی نزدیک رأس پایینی چندضلعی قرار بگیرد. از پایین می‌تواند هر دو حفاظ قرمز را ببیند. در سمت چپ و راست هر حفاظ قرمز دو قیف^۵ وجود دارد. که رأس نوک هر کدام تنها توسط اضلاعی از قیف روبرو دیدپذیر است. این اضلاع برای هیچ

^۳Class

^۴Pigeon Hole Principle

^۵funnel

نقطه‌ای از نقاط نزدیک رأس پایین چندضلعی دیدپذیر نیستند. بنابراین این غیرممکن است که با تنها یک حفاظ بتوان تمام چندضلعی را، در حالتی که حداکثر یک انعکاس مجاز است، پوشش داد. برای هر عدد داده شده k ، قیف‌های گفته شده می‌توانند به حد کافی باریک ساخته شوند به طوری‌که حتی k انعکاس نتواند منجر به پوشش کامل چندضلعی توسط تنها یک حفاظ شود.

۱.۴ الگوریتم تقریبی

برای پیدا کردن الگوریتم تقریبی برای مسئله‌ی حفاظت از موزهی هنر توسط حفاظ‌های رأسی در حضور k انعکاس پخش شونده، از الگوریتم گسسته‌سازی آقای Gosh [۲۲] استفاده می‌کنیم.

قضیه ۵.۴ مسئله‌ی حفاظت از موزهی هنر توسط حفاظ‌های رأسی و در حضور حداکثر k انعکاس، انعکاس از نوع پخش شونده یا آینه‌ای، را می‌توان در زمان $O(n^{4r+1+2})$ و با تقریب $O(\log n)$ حل کرد.

اثبات. همانند مقاله‌ی [۲۲] تمام پنجره‌های چندضلعی داده شده \mathcal{P} را رسم می‌کنیم و چندضلعی را به تعدادی چندضلعی محدب \mathcal{P} تقسیم می‌کنیم. مجموعه‌ی این چندضلعی‌های محدب را R_i بنامید. مجموعه‌ی رئوس از چندضلعی‌های داخل R_i را که بر روی محیط چندضلعی اصلی هستند، Q_i بنامید. در مرحله‌ی ابتدایی هیچ انعکاسی (پخش شونده) در نظر گرفته نمی‌شود. در مرحله‌ی بعد، دیدپذیری از طریق یک بار انعکاس مجاز است. در نتیجه چندضلعی‌های دیدپذیر رئوس چندضلعی بزرگتر شده و رئوس آن‌ها بر روی محیط \mathcal{P} ظاهر می‌شود. توسط رسم پنجره‌ها، تمامی چنین جفت رئوس را به یکدیگر متصل کنید تا مجموعه‌ای بزرگتر از چندضلعی‌های محدب بدست آید. مجموعه‌ی جدید چندضلعی‌های محدب بدست آمده را با R_1 و مجموعه‌ای از رئوس آن‌ها که بر روی محیط \mathcal{P} قرار دارند را با Q_1 نشان دهید. به طور مشابه، بعد از i بار انعکاس پخش شونده مجموعه‌های R_i و Q_i تعریف می‌شوند.

برای k انعکاس پخش شونده، مانند آنچه بیان شد، تمامی پنجره‌های ممکن را از روی Q_{k-1} رسم کنید و کوچکترین چندضلعی‌های محدب ممکن را از روی آن‌ها محاسبه کنید. توجه کنید که این عمل به $O(|Q_{k-1}|^4)$ زمان احتیاج دارد. مجموعه‌ی R_{k-1} را به R_k و مجموعه‌ی Q_{k-1} را به Q_k بروزرسانی کنید. این بروزرسانی باید از طریق بروز کردن چندضلعی‌های محدب مرحله‌ی قبل و رئوس که از آن‌ها بر روی \mathcal{P} قرار می‌گیرد انجام بشود. حداکثر تعداد اعضای جدید R_k برابر است با تعداد اعضای R_{k-1} به توان ۴ و حداکثر تعداد اعضای Q_k برابر است با تعداد اعضای Q_{k-1} به توان ۲. در نتیجه با توجه به استدلال مقاله‌ی [۲۲]، الگوریتم مطرح شده به زمان $O(n^{4r+1+2})$ احتیاج دارد تا پاسخ را با ضریب تقریب $O(\log n)$ برگرداند. ■

^۶convex polygon
^۷cardinality

۲.۴ جمع‌بندی فصل

در این فصل سعی کردیم که از انعکاس در جهت کمک به حل مسئلهی حفاظت از موزهی هنر بهره ببریم. نشان دادیم که اگر به تعداد r انعکاس داشته باشیم، تعداد کمینهی حفاظ مورد نیاز برای پوشش چندضلعی کاهش می‌یابد. اگر بهینهی تعداد حفاظها α باشد، نسبت تعداد حفاظهای مورد نیاز برابر است با $\lceil \frac{\alpha}{1 + \lfloor \frac{r}{4} \rfloor} \rceil$. اثبات شد که در حضور r انعکاس، با ضریب تقریب $O(\log n)$ و در زمان $O(n^{r+1+2})$ مسئلهی حفاظت از موزهی هنر قابل حل است.

فصل ۵

مسئله‌ی حفاظت موزه هنر در حضور اضلاع آینه‌ای

در این فصل نیز یک چندضلعی ساده P به عنوان محوطه موزه در نظر گرفته شده است. هدف آن است که کمترین تعداد دوربین (حفاظ نقطه‌ای) برای پوشش P انتخاب شود. الگوریتمی ارائه می‌دهیم که موقعیت مکانی مناسب این حفاظ‌ها را داخل P خروجی دهد. این الگوریتم با تقریب $O(\log n)$ جواب را برمی‌گرداند. ابتدا برخی تعاریف مورد نیاز برای توضیح الگوریتم را شرح می‌دهیم. سپس شبه کد الگوریتم را توضیح داده و جزئیات آن را بیان خواهیم کرد.

ایده آن است که بجای پیدا کردن یک موقعیت نقطه‌ای مشخص برای هر حفاظ، یک ناحیه در نظر بگیریم. این ناحیه طوری است که اگر یک حفاظ را داخل آن حرکت دهیم، تقریباً دیدپذیری یکسانی خواهد داشت. به هر یک از این ناحیه‌ها، منطقه‌ی-حفاظ^۱ گفته می‌شود. دیدپذیری تقریبی مذکور به طور دقیق‌تر در ادامه تعریف خواهد شد.

روال کار بدین گونه است که ابتدا چندضلعی P را به یکسری چندضلعی محدب^۲ تقسیم می‌کنیم. این تقسیم‌بندی به گونه‌ایست که هیچ یک از چندضلعی‌های محدب اشتراکی ندارند و همچنین اجتماع آن‌ها دقیقاً برابر با P می‌شود. بر اساس همین دو ویژگی، به هر یک از این چندضلعی‌ها، چندضلعی-محدب-پوشا^۳ می‌گوییم. که هر یک را با علامت SCR نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی تمام چندضلعی‌های-محدب-پوشا را با علامت SCR نشان می‌دهیم و تعداد اعضای این مجموعه را با $|SCR|$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم یک تعریف دیدپذیری تقریبی خاص برای یک ناظر به نام دیدپذیری-ناحیه‌ای^۴ ارائه دهیم. برای درک بهتر این تعریف، به هر چندضلعی-محدب-پوشا یک عدد منحصر بفرد طبیعی نسبت دهیم. یک حفاظ g_1 و یک حفاظ g_2 داخل P در نظر بگیرید. فرض کنید g_1 چندضلعی‌های-محدب-پوشای $\{15, 16, 17, 18, 32\}$ را به طور کامل می‌بیند و همین‌طور g_2 مجموعه‌ی $\{15, 19, 30, 31, 32\}$ را کاملاً می‌بیند. مسلماً چندضلعی‌های-محدب-پوشایی هستند که هر کدام از حفاظ‌های g_1 یا g_2 تنها قسمتی از آن‌ها را می‌بینند. این نوع چندضلعی‌های-محدب-پوشا را دیدپذیر-ناقص^۵ می‌خوانیم.

تعریف ۱.۵ یک نقطه p در نظر بگیرید، اگر تمام نقاط یک ناحیه r برای p دیدپذیر باشند، آنگاه می‌گوییم r برای p دیدپذیر-

^۱ Guarding-Region

^۲ Convex Regions

^۳ Spanning-Convex-Region

^۴ Area-Visibility

^۵ Partially Visible

ناحیه‌ای است. همچنین ناحیه‌ی r_1 برای ناحیه‌ی r_2 دیدپذیر-ناحیه‌ای است اگر و فقط اگر هر نقطه‌ی r_2 برای همه‌ی نقاط r_1 دیدپذیر-ناحیه‌ای باشند.

هدف آن است که کمترین تعداد منطقه‌ی-حفاظ داخل P پیدا کنیم، که هر کدام مشخص‌کننده‌ی مکانی برای قرار دادن یک حفاظ نقطه‌ای هستند، به طوری که این حفاظ‌ها تمام P را پوشش دهند.

الگوریتم مورد نظر ابتدا چندضلعی P را به چندضلعی‌های-محدب-پوشا تقسیم افزار می‌کند. سپس، هر کدام از چندضلعی‌های-محدب-پوشا را به تعدادی منطقه‌ی-حفاظ تقسیم می‌کند. الگوریتم مذکور از دو رویه^۶ استفاده می‌کند. که جزییات هر رویه را به طور جداگانه در بخش‌های ۲.۱.۵ و ۳.۱.۵ توضیح خواهیم داد.

رویه‌ی یافت^۷ یک پاره‌خط و یک چندضلعی-محدب-پوشا از ورودی می‌گیرد. سپس، یک بازه بر روی پاره‌خط داده شده چنان می‌یابد که چندضلعی-محدب-پوشای داده شده برای تمامی نقاط آن بازه دیدپذیر-ناحیه‌ای باشند. چنین بازه‌ای را بازه‌ی دیدپذیر-قوی^۸ می‌نامیم.

رویه‌ی افزاز^۹ یک چندضلعی-محدب-پوشا scr را به همراه یک لیست از زیرناحیه‌های^{۱۰} scr را از ورودی می‌گیرد. هر کدام از این زیرناحیه‌ها منطقه‌ای داخل scr را مشخص می‌کند که همه‌ی نقاطش می‌توانند یک چندضلعی-محدب-پوشا به غیر از scr را دیدپذیر-ناحیه‌ای کنند. رویه‌ی افزاز چندضلعی-محدب-پوشای scr را به گونه‌ای به منطقه‌های-حفاظ تقسیم می‌کند که اجتماع همه‌ی آن‌ها برابر با scr شده و اشتراک آن‌ها تهی شود. همچنین این رویه مشخص می‌کند که نقاط هر منطقه‌ی-حفاظ بدست آمده دقیقاً چه لیستی از چندضلعی‌های-محدب-پوشا را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کنند.

۱.۵ الگوریتم تقریبی

مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

مسئله ۲.۵ [مسئله‌ی حفاظت+انعکاس]

یک چندضلعی ساده داده شده‌ی P داریم. می‌خواهیم کمترین تعداد حفاظ‌های-نقطه‌ای را بیابیم که تمام P را پوشش دهند. همچنین برای هر حفاظ دیدپذیری از طریق یکبار انعکاس آینه‌ای بر روی هر ضلع P مجاز است.

حال با توجه به مسئله‌ی فوق داریم:

قضیه ۳.۵ برای مسئله‌ی حفاظت+انعکاس یک الگوریتم با تقریب $O(1)$ وجود دارد.

بقیه‌ی مطالب این بخش شامل یک الگوریتم برای مسئله‌ی حفاظت+انعکاس است و سپس در بخش ۴.۱.۵ الگوریتم طراحی شده تحلیل خواهد شد.

^۶Procedure

^۷Find

^۸strongly-visible

^۹Decompose

^{۱۰}sub-region

۱.۱.۵ برخی تعاریف استفاده شده در الگوریتم

زیرناحیه‌ی-موقت^{۱۱} یک زیرناحیه از یک چندضلعی-محدب-پوشاست که برای افراز هر چندضلعی-محدب-پوشا به کار می‌رود. هر زیرناحیه‌ی-موقت را با علامت tsr نشان می‌دهیم. یک زیرناحیه‌ی-موقت tsr داخل چندضلعی-محدب-پوشای scr_i نقاطی از scr_i را نشان می‌دهد که می‌توانند یک چندضلعی-محدب-پوشای دیگر، مثل scr_j را دیدپذیر-ناحیه‌ای کنند. در واقع scr_j برای tsr دیدپذیر-ناحیه‌ای است. توجه داشته باشید که از آنجایی که tsr داخل scr_i قرار دارد، خود scr_i هم در لیست چندضلعی‌های-محدب-پوشایی است که برای tsr دیدپذیر-ناحیه‌ای هستند. در هر صورت هر زیرناحیه‌ی-موقت تنها با یک و فقط یک چندضلعی-محدب-پوشای خارجی متناظر است. لیکن به وضوح زیرناحیه‌های-موقت داخل یک چندضلعی-محدب-پوشا با یکدیگر اشتراک دارند. برای چندضلعی-محدب-پوشای scr_i مجموعه‌ی تمام زیرناحیه‌های-موقتش را با علامت t_i نشان می‌دهیم. این زیرناحیه‌های-موقت با بررسی اضلاع یک چندضلعی-محدب-پوشا بدست می‌آیند. چندضلعی-محدب-پوشای scr_i را در نظر بگیرید. فرض کنید که scr_i ، به تعداد Ed_i ضلع دارد. j امین ضلع از scr_i را با $e_j(scr_i)$ نشان می‌دهیم و داریم $1 \leq j \leq Ed_i$.

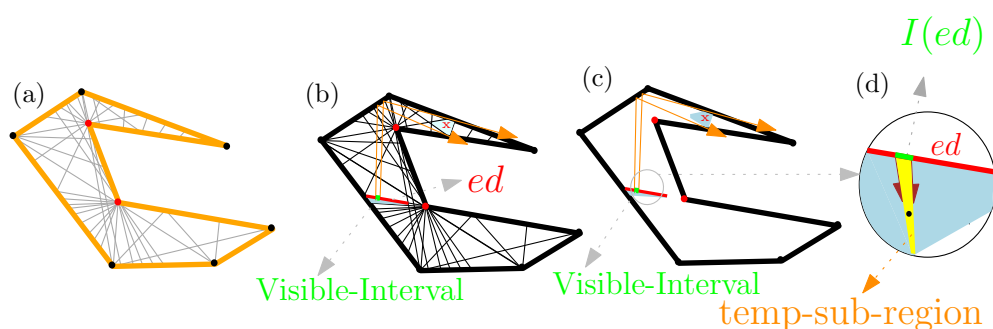
زیرناحیه‌های-موقت در نهایت تبدیل به منطقه‌های-حفاظ می‌شوند. مجموعه‌ی تمام منطقه‌های-حفاظ \mathcal{P} را به علامت \mathcal{S} نشان می‌دهیم و $|\mathcal{S}|$ نشان دهنده‌ی تعداد اعضای \mathcal{S} است.

هر کدام از ناحیه‌های چندضلعی-پوشای-محدب، زیرناحیه‌ی-موقت و منطقه‌ی-حفاظ را به طور کلی زیرناحیه‌ای از \mathcal{P} می‌خوانیم و با علامت sr نشان می‌دهیم. یک ناحیه sr توسط یک زوج مرتب نشان داده می‌شود $(\langle sr, VL(sr) \rangle)$. عنصر اول این زوج مرتب نشان دهنده‌ی چندضلعی-محدب-پوشایی هست که sr داخل آن قرار دارد. دومین عنصر زوج مرتب مذکور لیست تمامی چندضلعی‌های-محدب-پوشایی هست که توسط sr دیدپذیر-ناحیه‌ای هستند. برای راحتی این لیست شامل چندضلعی-محدب-پوشای عنصر اول نیز هست. تعداد اعضای این لیست توسط علامت $|\mathcal{VL}|$ نشان داده می‌شود.

مجموعه‌ی پاسخ نهایی الگوریتم شامل تعدادی از منطقه‌های-حفاظ است. این مجموعه را با \mathcal{F} نشان می‌دهیم و $|\mathcal{F}|$ نشان دهنده‌ی تعداد اعضای آن است. این مجموعه زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی \mathcal{S} است. همانطور که گفته شد الگوریتم، \mathcal{P} را به $|\mathcal{SCR}|$ عدد چندضلعی-محدب-پوشا تقسیم می‌کند و داریم $\bigcup_{i=1}^{|\mathcal{SCR}|} scr_i = \mathcal{P}$. بنابراین برای پوشش کامل \mathcal{P} باید تمامی چندضلعی‌های-محدب-پوشا توسط منطقه‌ها-حفاظ موجود در مجموعه‌ی \mathcal{F} دیدپذیر-ناحیه‌ای شوند.

مجموعه‌ی تمام منطقه‌های-حفاظ داخل scr_i را با علامت s_i نشان می‌دهیم. الگوریتم در هر مرحله هر کدام از مجموعه‌های s_i را که $1 \leq i \leq |\mathcal{SCR}|$ ، حساب می‌کند و به مجموعه‌ی \mathcal{S} مرحله قبل اضافه می‌کند و پس از تشکیل مجموعه‌ی نهایی \mathcal{S} ، زیرمجموعه‌ی پاسخ نهایی \mathcal{F} را از داخل \mathcal{S} برمی‌گزیند. انتخاب زیرمجموعه‌ی بهینه از \mathcal{S} می‌تواند به عنوان یک نمونه از مسئله‌ی معروف پوشش-مجموعه^{۱۲} در نظر گرفته شود.

^{۱۱}temporary-sub-region^{۱۲}Set Cover



شکل ۱.۵: در شکل (a) یک تقسیم‌بندی برای چندضلعی P داده شده است. در شکل (b) یکی از چندضلعی‌های -محدب- پوشا انتخاب شده است. در این شکل قسمتی از چندضلعی -محدب- پوشای انتخاب شده که از طریق ضلع ed چندضلعی -محدب- پوشای x را به طور کامل می‌بیند. در شکل (c) این چندضلعی‌های -محدب- پوشا و ضلع -انعکاس دهنده واضح‌تر و بدون نمایش افراز نشان داده شده‌اند. در شکل (d) زیرناحیه‌ی -موقتی داخل چندضلعی -محدب- پوشای اولیه مشخص شده است که برای x دیدپذیر-ناحیه‌ای است.

۲.۱.۵ توصیف الگوریتم

چندضلعی -محدب- پوشای scr_i را با Ed_i ضلع در نظر بگیرید. هر حفاظی داخل scr_i تنها از طریق یکی از اضلاع scr_i می‌تواند چیزی خارج از scr_i را ببیند. بنابراین اگر حفاظ g داخل scr_i بخواهد یک چندضلعی -محدب- پوشای دیگر (scr_j) را دیدپذیر-ناحیه‌ای کند، باید دیدپذیری اضلاع scr_i بررسی شود و از طریق آن‌ها می‌توان مناطق مختلف دیدپذیری داخل یک چندضلعی -محدب- پوشا را کشف کرد. الگوریتم ۱.۵ تمامی اضلاع همه‌ی چندضلعی‌های -محدب- پوشای داخل P را به نوبت بررسی می‌کند. یک ضلع از scr_i را در نظر بگیرید، آن را با علامت ed نشان می‌دهیم. فرض کنید g از طریق ed می‌تواند scr_j را دیدپذیر-ناحیه‌ای کند. بازه‌ای بر روی ed وجود دارد که اشعه‌های متصاعد شده از g با گذشتن از این بازه scr_j را می‌بینند. این بازه را $I(ed)$ مینامیم. بازه‌ی $I(ed)$ در واقع بخش دیدپذیر-قوی برای این است که scr_j دیدپذیر-ناحیه‌ای شود. این بازه به این جهت مهم است که زیرناحیه‌ای داخل scr_i مشخص می‌کند که scr_j برای تمام نقاط این زیرناحیه دیدپذیر-ناحیه‌ای است. با استفاده از نقاط انتهایی $I(ed)$ می‌توانیم اشعه‌هایی را پیدا کنیم که محیط scr_j را پوشش می‌دهند. با امتداد دادن این اشعه‌ها در جهت عکس به داخل scr_i خطوطی داخل scr_i پیدا کنیم که محیط یک زیرناحیه‌ی -موقت را مشخص می‌کنند که نقاط داخل این زیرناحیه scr_j را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کنند. به این طریق یک زیرناحیه‌ی -موقت tsr داخل scr_i پیدا می‌شود. هر دو چندضلعی‌های -محدب- پوشای scr_i و scr_j باید در لیست دیدپذیر-ناحیه‌ای مربوط به tsr قرار بگیرند (به شکل ۱.۵ نگاه کنید).

الگوریتم ۱.۵ تمامی منطقه‌های -حفاظ را در هر چندضلعی -محدب- پوشا پیدا می‌کند و برای هر scr_i ($1 \leq i \leq n$) منطقه‌های -حفاظ متناظرش را در مجموعه‌ی s_i می‌ریزد. همانطور که گفته شد الگوریتم برای کار خود از دو رویه به نام‌های رویه‌ی یافت و رویه‌ی افزار استفاده می‌کند. هر کدام از این رویه‌ها از یک روش خط-جاروب‌کننده^{۱۳} استفاده

^{۱۳}sweep-line

Algorithm 5.1 Main Procedure

```

1: procedure Art+R( $\mathcal{P}$ )
2:   define  $\leftarrow$  = Add an element to a set/list.
3:   define  $tsr_i(scr_j)$  = The temp-sub-region in the  $i^{th}$  spanning-convex-region
   where  $scr_j$  is area-visible to  $tsr_i(scr_j)$ .
4:   /*Decomposing  $\mathcal{P}$ : Choose any decomposition of  $\mathcal{P}$  that decomposes  $\mathcal{P}$  into
   a set of convex components. Denote each such component by  $scr$ .
5:   for  $i=1 ; i \leq |SCR| ; i++$  : /* for every spanning-convex-region
6:     for  $k=1 ; k \leq |Ed_i| ; k++$  : /* pick its edges one by one
7:       for  $j=1 ; j \leq |SCR| ; j++$  : /* find each  $tsr$  corresponding to every  $scr_j$ 
   inside each  $scr_i$ 
8:         Find[vscr]( $ed_{ik}, scr_j$ ) /*  $ed_{ik}$  is the  $k$ th edge of  $scr_i$ 
9:         if  $tsr_i(scr_j)$  sees  $scr_j$  do
10:           $VL(temp_i(scr_j)) \leftarrow scr_j$ 
11:           $t_i \leftarrow tsr_i(scr_j)$ 
12:          /*Extracting guarding-regions from temp-sub-regions in each  $scr$ :
13:          for  $i=1 ; i \leq |SCR| ; i++$ :
14:            Decompose( $scr_i$ )
15:             $s_i \leftarrow$  <the result regions, corresponding visible-lists>;
16:            for each  $gr$  in  $s_i$  :
17:               $\mathcal{S} \leftarrow$  < $gr, VL_{gr}$ >;
18:             $\mathcal{F} \leftarrow$  Formulate the set cover problem and solve it approximately.
19:            Return  $\mathcal{F}$ 

```

می‌کنند. توضیح این رویه‌ها در همین بخش متعاقبا داده خواهد شد.

توضیح شبه کد الگوریتم

به الگوریتم ۱.۵ نگاه کنید. این یک شبه کد است که رویه مورد نظر با نام ART+R نشان داده شده است و یک چندضلعی ساده به نام \mathcal{P} از ورودی می‌گیرد. خط دوم این شبه کد، علامت \leftarrow را تعریف می‌کند. این علامت برای نشان دادن عمل اضافه کردن یک عنصر به اعضای یک لیست یا یک مجموعه به کار می‌رود. خط سوم علامت $tsr_i(scr_j)$ را تعریف می‌کند. که این علامت نشان دهنده‌ی آن زیرناحیه‌ی موقتی در i امین چندضلعی-محدب-پوشا است که scr_j را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کنند. بند چهارم الگوریتم، یک الگوریتم تقسیم برای تجزیه‌ی \mathcal{P} به مجموعه‌ی چندضلعی‌های-محدب-پوشا انتخاب می‌کند. تقسیم‌بندی \mathcal{P} آن را به چندضلعی‌های-محدب-پوشا افراز می‌کند. مجموعه‌ی این چندضلعی‌های-محدب-پوشا را SCR می‌نامیم. سه حلقه‌ی for در خط‌های پنج، شش و هفتم الگوریتم وجود دارد. حلقه‌ی اول یک

چندضلعی-محدب-پوشا را مشخص کرده و حلقه‌ی دوم یک ضلع Ed_i از آن چندضلعی-محدب-پوشا را تعیین می‌کند. حلقه‌ی سوم بررسی می‌کند که این ضلع کدام چندضلعی‌های-محدب-پوشای دیگری را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کند. این حلقه همه‌ی چندضلعی‌های-محدب-پوشا را می‌شمارد و برای هر کدام بازه‌ی دیدپذیر-قوی روی Ed_i را بدست می‌آورد. رویه‌ی یافت بازه‌های دیدپذیر-قوی را روی Ed_i پیدا می‌کند. در خطوط نهم تا یازدهم، تمامی زیرناحیه‌های-موقت داخل چندضلعی-محدب-پوشای i ام را داخل مجموعه‌ی t_i می‌ریزد. خطوط دوازدهم تا شانزدهم هر چندضلعی-محدب-پوشا را به منطقه‌های-حفاظ افزاز می‌کند. این افزاز توسط رویه‌ی افزاز انجام می‌شود. منطقه‌های-حفاظ داخل scr_i در خط چهاردهم به مجموعه‌ی s_i اضافه می‌شود. در ادامه در حلقه‌ی خط پانزدهم تمامی منطقه‌های-حفاظ به مجموعه‌ی S اضافه می‌شوند. خط هفدهم شبه کد الگوریتم، بهترین زیرمجموعه \mathcal{F} را از داخل مجموعه‌ی S انتخاب می‌کند. این انتخاب می‌تواند توسط یک الگوریتم تقریبی برای مسئله‌ی پوشش-مجموعه انجام شود.

هر منطقه‌ی-حفاظ در واقع مشابه به یک زیرمجموعه است و S مجموعه‌ای از این زیرمجموعه‌هاست. و این مسئله نمونه‌ای از مسئله‌ی مشهور پوشش-مجموعه است. برای حل حریصانه این مسئله و انتخاب کمترین تعداد زیرمجموعه‌ها از مجموعه‌ی S به طوریکه \mathcal{P} پوشش داده شود می‌توانیم از روش زیر استفاده کنیم: منطقه‌های-حفاظ داخل مجموعه‌ی S را براساس اندازه‌ی لیست-دیدپذیری (VL) آن‌ها به ترتیب نزولی مرتب می‌کنیم. سپس، از ابتدای مجموعه‌ی مرتب شده‌ی S یک منطقه‌ی-حفاظ انتخاب کرده، از S حذف می‌کنیم و در مجموعه‌ی \mathcal{F} قرار می‌دهیم. سپس، تمامی چندضلعی‌های-محدب-پوشای داخل لیست-دیدپذیری منطقه‌ی-حفاظ انتخاب شده را از لیست-دیدپذیری بقیه‌ی عناصر S حذف می‌کنیم. همین روند را تکرار می‌کنیم و هر دفعه یکی از عناصر S را حذف می‌کنیم تا زمانیکه تمامی چندضلعی‌های-محدب-پوشای موجود دیدپذیر شوند و درواقع \mathcal{P} پوشش داده شود. این روش حریصانه می‌تواند با تقریب $O(\log n)$ جواب بهینه را برگرداند. مجموعه‌ی \mathcal{F} در نهایت در خط هیجدهم شبه کد به عنوان خروجی الگوریتم ارسال می‌شود.

رویه‌ی یافت

فراخوانی رویه‌ی یافت به صورت زیر است:

Procedure Find(a segment, a spanning-convex-region)

این رویه یک پاره‌خط و یک چندضلعی-محدب-پوشا را از ورودی می‌گیرد. این پاره‌خط را ed می‌نامیم و به عنوان ناظر به آن نگاه می‌کنیم. هدف رویه‌ی یافت آن است تا بخشی از پاره‌خط ed بگونه‌ای یافت شود که همه‌ی نقاط این بخش بتوانند چندضلعی-محدب-پوشای داده شده را ببینند. به این چندضلعی-محدب-پوشا چندضلعی-هدف^{۱۴} می‌گوییم. فرض کنید که ed ضلعی از اضلاع یک چندضلعی-محدب-پوشا باشد به این چندضلعی، چندضلعی-مبدأ^{۱۵} می‌گوییم. به طور کلی سه حالت برای رویه‌ی یافت وجود دارد: ۱- بخشی از ed (یک بازه یا حداقل یک نقطه) بتواند چندضلعی-هدف را به طور مستقیم دیدپذیر-ناحیه‌ای کند.

۲- یک بازه روی ed بتواند چندضلعی-هدف را تنها با استفاده از انعکاس دیدپذیر-ناحیه‌ای بکند.

۳- یک بازه روی ed بتواند چندضلعی-هدف را با استفاده از انعکاس و دیدپذیری مستقیم دیدپذیر-ناحیه‌ای بکند.

^{۱۴}target

^{۱۵}source

۱. یافتن بازه‌ای روی ed که بتواند چندضلعی-هدف را تنها با دیدپذیری مستقیم دیدپذیر-ناحیه‌ای کند.

برای بدست آوردن چنین بازه‌ای، چندضلعی-دیدپذیر-قوی پاره‌خط ed را محاسبه کرده و بررسی می‌کنیم که چندضلعی-هدف داخل آن باشد. این کار در زمان خطی با توجه به پیچیدگی P انجام می‌شود و بازه‌ی دیدپذیر-قوی روی ed یعنی $I(ed)$ را محاسبه می‌کند. این بازه را به عنوان خروجی رویه‌ی \mathcal{F} ذخیره می‌کنیم. اما ممکن است انعکاس کمک کند تا این بازه بزرگتر شود، لذا باید حالات دیگر نیز بررسی شوند.

۲. یافتن بازه‌ای روی ed که بتواند چندضلعی-هدف را تنها با استفاده از انعکاس دیدپذیر-ناحیه‌ای کند.

برای محاسبه این حالت، از الگوریتم موجود در بخش ۳.۵ مقاله‌ی [۴۳] استفاده می‌کنیم. برای استفاده از این الگوریتم از ed به عنوان \overline{xy} استفاده می‌کنیم. همچنین باید از دو اشعه‌ی $L_{1,x}$ و $L_{2,y}$ استفاده شود تا مطمئن شویم چندضلعی-هدف به طور کامل برای $I(ed)$ دیدپذیر-انعکاسی می‌شود. اشعه‌های مذکور باید از ed متصاعد شده و بعد از انعکاس از روی یک ضلع به چندضلعی-هدف برسند. یکی از چنین اضلاعی که از انعکاس دیدپذیری-انعکاسی ایجاد می‌شود را e بنامید. جهت عکس اشعه‌های منعکس شده روی e به سمت ed دو نقطه روی ed مشخص می‌کنند و یا خود نقاط انتهایی ed را نشان می‌دهند. این نقاط برای هر ضلع انعکاسی چون e بررسی شده و بزرگترین بازه‌ی دیدپذیر-قوی روی $I(ed)$ مشخص می‌شود. امتداد معکوس دو اشعه روی نقاط انتهایی $I(ed)$ یک زیرناحیه‌ی-موقت tsr داخل چندضلعی-مبدأ مشخص می‌کنند. با کمک سرچ دودویی می‌توانیم محل برخورد امتداد نیم‌خط‌های آمده از ضلع-انعکاس‌کننده را داخل چندضلعی-مبدأ در زمان $O(\log n)$ پیدا کنیم. بنابراین، چندضلعی-هدف برای تمام نقاط tsr دیدپذیر-ناحیه‌ای از نوع انعکاسی هست.

لازم به ذکر است که الگوریتم استفاد شده از مقاله‌ی [۴۳] برای بررسی دیدپذیری-انعکاسی یک پاره‌خط مبدأ با یک پاره‌خط دیگر به عنوان هدف است نه با یک ناحیه به عنوان هدف. لیکن در اینجا هدف، یک چندضلعی-محدب است. فرض کنید که این چندضلعی-هدف k ضلع دارد، برای اینکه مطمئن باشیم که چندضلعی-هدف به طور کامل توسط پاره‌خط ناظر دیدپذیر-انعکاسی می‌شود هر کدام از اضلاع را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم و k بار الگوریتم را اجرا می‌کنیم و هر بار اشتراک ناحیه‌های بدست آمده داخل چندضلعی-مبدأ را حساب کنیم. با توجه به اینکه الگوریتم مذکور زمان خطی احتیاج دارد در کل برای این بررسی این حالت به زمان $O(kn \log n)$ احتیاج داریم.

۳. یافتن بازه‌ای بر روی ed که نقاط روی آن بتوانند بخشی از چندضلعی-هدف را به صورت مستقیم و مابقی آن را با کمک انعکاس دیدپذیر کنند.

ادامه‌ی این بخش به بررسی این حالت می‌پردازد.

برای اینکه بازه‌هایی از نوع آنچه در حالت سوم بیان شد را محاسبه کنیم، فرض می‌کنیم که چندضلعی-هدف تنها یک پاره‌خط است. بدیهی است که با این فرض می‌توان محاسبات را به طور مشابهی برای کل چندضلعی-هدف انجام داد. در انتها باید مطمئن شد که چندضلعی-هدف به طور کامل برای $I(ed)$ دیدپذیر-ناحیه‌ای باشد. پاره‌خط مبدأ را \overline{xy} و پاره‌خط هدف را \overline{uw} می‌نامیم.

روشی که برای مورد سوم باید بکار گرفت

۱. قبل از هر چیز توجه داشته باشید که از قسمت‌های قبلی دو نوع از بازه‌های $I(ed)$ را داریم: ۱- بازه‌هایی که تنها با در نظر گرفتن دیدپذیری مستقیم چندضلعی-هدف را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کنند. ۲- بازه‌هایی که تنها از طریق انعکاس چندضلعی-هدف را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کنند.

۲. در این مرحله از الگوریتم موجود در بخش ۵.۴ موجود در مقاله‌ی [۴۳] استفاده می‌کنیم. ابتدا چندضلعی-دیدپذیر-ضعیف ed را محاسبه کرده، سپس، بازه‌هایی روی ed بدست می‌آوریم که بتوانند \overline{uw} را به صورت ضعیف ببینند.

۳. حال همه‌ی نقاطی از ed که حداقل یک نقطه از \overline{uw} را می‌بینند بدست آورده‌ایم. همچنین دقت کنید که همه‌ی نقاطی از ed که حداقل یک نقطه از \overline{uw} را با استفاده از انعکاس (از طریق هر ضلعی به عنوان ضلع-انعکاسی) ببینند نیز داریم.

۴. عملیات جاروب کردن^{۱۶} را بر روی پاره‌خط مبدأ یعنی ed ، که در مقاله‌ی [۴۳] با نام \overline{xy} نشان داده شده است، شروع می‌کنیم. این عملیات از x شروع شده و در y خاتمه می‌یابد. در عملیات جاروب کردن هفت رویداد^{۱۷} مختلف ممکن است اتفاق بیافتد. که در ادامه ابتدا آن‌ها را توضیح داده و سپس الگوریتمی ارائه می‌دهیم که مشخص شود که عملیات جاروب با برخورد با هر رویداد چگونه باید عمل کند. همچنان که بر روی ed جاروب می‌کنیم نقطه‌ای که هر لحظه خط-جاروب‌کننده^{۱۸} به آن می‌رسد را p می‌نامیم. رویدادهای ممکن در حین عملیات جاروب به قرار زیر هستند:

EV_1 : عدم دیدپذیری.

این رویداد زمانیست که p هیچ نقطه‌ای از \overline{uw} را نمی‌تواند ببیند.

EV_2 : خروج از یک قسمت که می‌تواند دیدپذیری مستقیم ایجاد کند.

نقطه‌ی p نمی‌تواند هیچ نقطه‌ای از \overline{uw} را مستقیماً ببیند.

EV_3 : ورود به یک قسمت که می‌تواند دیدپذیری مستقیم ایجاد کند.

نقطه‌ی p می‌تواند قسمتی از \overline{uw} را ببیند.

EV_4 : خارج شدن از قسمتی از ed که می‌تواند از طریق یک ضلع-انعکاسی دیدپذیری-انعکاسی ایجاد کند. اسم این ضلع را e بگذارید.

نقطه‌ی p هنوز ممکن است بتواند \overline{uw} را از طریق ضلع-انعکاسی دیگری (که آن را با e' نشان می‌دهیم) ببیند. عکس ۲.۵ قسمت (e) را ببینید.

EV_5 : ورود به یک قسمت که می‌تواند روی \overline{uw} دیدپذیری-انعکاسی ایجاد کند.

در واقع نقطه‌ی p ممکن است بخشی از پاره‌خط \overline{uw} را توسط یک ضلع-انعکاسی به نام e ببیند. عکس ۲.۵ قسمت (b) را ببینید.

^{۱۶}sweeping

^{۱۷}event

^{۱۸}sweep-line

EV_6 : ورود به یک بازه‌ی دیدپذیر- قوی از نوع دیدپذیری مستقیم.

در این حالت نقطه‌ی p می‌تواند به طور کامل \overline{uw} را ببیند، حال یا با دید مستقیم و یا از طریق انعکاس بر روی اضلاع P .

EV_7 : خروج از یک بازه‌ی دیدپذیر- قوی از نوع دیدپذیری مستقیم.

نقطه‌ی p دیگر نمی‌تواند \overline{uw} را به طور کامل ببیند، چه از طریق انعکاس چه به طور مستقیم. اما در این حالت، ممکن است p بخشی از \overline{uw} را به هر طریقی ببیند.

شکل ۲.۵ یک مثال از آنچه که ممکن است هنگام عملیات جاروب روی ed رخ دهد به نمایش گذاشته است. عملیات جاروب از نقطه‌ی p_{-1} بر روی ed شروع می‌شود. در شکل (a) میبینیم که نقطه‌ی p_{-1} هیچ بخشی از پاره‌خط \overline{uw} را دیدپذیر نمی‌کند. اما اگر بر روی ed حرکت کنیم، همانطور که در شکل (b) مشخص است، در اوایل حرکت قسمتی از نقاط \overline{uw} با استفاده از انعکاس بر روی ضلع e دیدپذیر خواهد شد (نقطه‌ی p_0). گرچه هنوز هیچ بخشی از \overline{uw} دیدپذیری مستقیم ندارد. حال به شکل (c) توجه کنید، همانطور که بر روی ed حرکت می‌کنیم، دیدپذیری مستقیم بر روی \overline{uw} آغاز می‌شود و این دیدپذیری مستقیم ادامه می‌یابد تا زمانی که محل دیدپذیر کننده‌ی مستقیم به محلی می‌رسد که دیدپذیر- انعکاسی ایجاد می‌کرده است. نقطه‌ی p_1 محلی است که نقاط روی ed شروع می‌کنند به دیدپذیری کامل پاره‌خط \overline{uw} . این دیدپذیری- کامل شامل هر دو نوع دیدپذیری مستقیم و دیدپذیری- انعکاسی است. شکل (d) را ببینید، نقطه‌ی p_2 همچنین بر روی بازه‌ی ed قرار دارد که از هر دو نوع دیدپذیری برای دیدپذیری- کامل \overline{uw} قرار دارد. لیکن p_2 می‌تواند بخشی از \overline{uw} را از هر دو طریق دیدپذیری مستقیم و دیدپذیری- انعکاسی ببیند، همینطور که بر روی ed حرکت می‌کنیم قسمت دیدپذیر مستقیم \overline{uw} از سمت u به w پیش می‌رود و در نهایت از بین می‌رود. در نظر داشته باشید که ممکن است حالاتی پیش بیاید که دیدپذیری- انعکاسی رفته رفته از بین برود و دیدپذیری مستقیم دیدپذیری غالب باشد. اینچنین حالتی در این مثال آورده نشده است. حال به شکل (e) نگاه کنید، در این شکل نقطه‌ی p_3 نمایش داده شده است که این نقطه محلی است که نقاط ed دیگر از طریق ضلع- انعکاسی e_2 پاره‌خط \overline{uw} را نمی‌بینند. در شکل f می‌بینید که نقطه‌ی p_4 نقطه‌ایست که در آن ed می‌تواند تمام \overline{uw} را یا توسط دیدپذیری مستقیم و انعکاس از ضلع- انعکاسی e_2 دیدپذیر کند و یا از طریق انعکاس از طریق دو ضلع e_1 و e_2 .

۵. در این مرحله، یک پاره‌خط به نام CI تعریف می‌کنیم و نقاط انتهایی آن را CI_1 و CI_2 می‌نامیم. در حین عمل جاروب اگر به نقطه‌ای برسیم که پاره‌خط \overline{uw} را توسط دید مستقیم همزمان با کمک انعکاس دیدپذیر- کامل کند. این چنین نقطه‌ای را q می‌نامیم. اگر به نقطه‌ای مثل q برسیم، آنگاه بازه‌ی CI بر روی ed را با قرار دادن $CI_1 = q$ شروع خواهیم کرد. هر جا قرار باشد که این بازه را ببندیم نقطه‌ی CI_2 را آنجا قرار می‌دهیم. سپس، بازه‌ی CI را در خروجی این قسمت قرار داده و به عملیات جاروب ادامه می‌دهیم. با کمک نقاط انتهایی CI می‌توان بعداً زیرناحیه‌های- موقت را داخل چندضلعی- محدب- پوشای مبدأ بدست آورد. این نقاط انتهایی در واقع در یافتن اشعه‌های مورد نیاز برای بدست آوردن زیرناحیه‌ی- موقت مورد نظر استفاده خواهد شد.

در ادامه‌ی الگوریتم می‌بینیم که روند جاروب کردن برای محاسبه‌ی بازه‌های CI بر روی ed را نشان می‌دهد. این شبه کد در واقع عملیات جاروب را از x شروع کرده و در y به پایان می‌رساند. به یاد داشته باشید که خط \overline{xy} در واقع نشان دهنده‌ی پاره‌خط ed است. همچنین یادآور می‌شویم که نقطه‌ی p نشان دهنده‌ی محل فعلی جاروب‌کننده

است. نقطه‌ای به نام q تعریف می‌کنیم که نشان دهنده‌ی آخرین موقعیت قبل از p است. به عنوان مثال اگر p از یک منطقه‌ی دیدپذیر کنده به یک منطقه‌ی غیردیدپذیر کننده بر روی ed حرکت کند، نقطه‌ی q نگه دارنده‌ی آخرین نقطه‌ی دیدپذیر کننده‌ی ed خواهد بود.

Algorithm 5.2 Sweeping Procedure 1

procedure Reflection and Direct Visibility Simultaneously

```

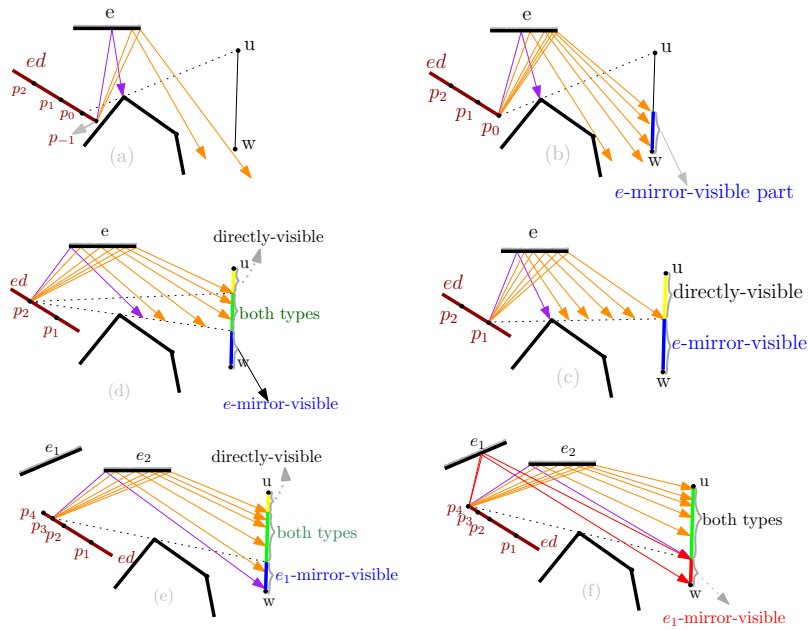
2:   If ( $p$  can see  $\overline{uw}$  entirely (both directly and via reflection)) do
      Set  $CI_1 = p$ 
4:   If ( $p \in EV_1|EV_6$ ) do
      Set  $CI_2 = q$ 
6:   Put  $CI$  in the output set
      If ( $p \in EV_3|EV_5|EV_7$ ) do
8:     If ( $p$  can see  $\overline{uw}$  entirely (both directly and via reflection)) do
          If ( $CI_1$  is set to a point previously) do
10:        Continue to sweep on  $ed$  toward  $y$ ;
          else
12:        Set  $CI_1 = p$ 
          If ( $q \in EV_2$ ) do
14:        If ( $p \in EV_5$ ) do
            If ( $CI_1$  is set to a point previously) do
16:              Continue to sweep on  $ed$  toward  $y$ 
            else
18:              Set  $CI_1 = p$ 
            else if ( $p \in EV_1|EV_6$ )
20:              Set  $CI_2 = q$ 
              Put  $CI$  in the output set
22:   Return the output set;
  
```

۳.۱.۵ رویه‌ی افراز چندضلعی‌های -محدب- پوشا

فراخوانی رویه‌ی افراز به صورت زیر است:

Procedure Decompose(spanning-convex-region)

در این بخش جزئیات رویه‌ی افراز را شرح خواهیم داد. فرض کنید که یک چندضلعی-محدب-پوشا به نام scr از ورودی داریم، که scr شامل تعدادی زیرناحیه‌ی-موقت است. این رویه scr را به تعدادی منطقه‌ی-حفاظ به گونه‌ای تقسیم



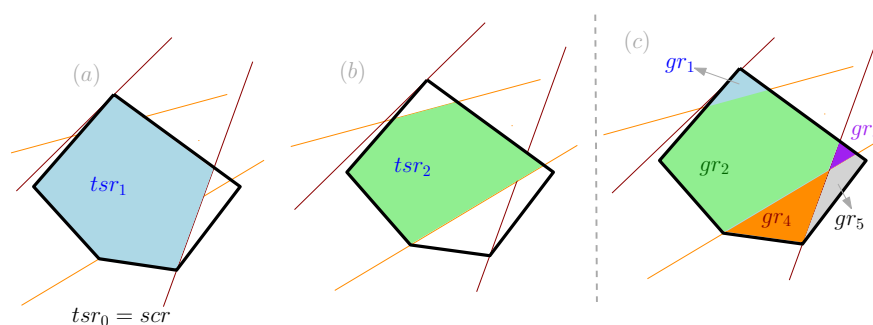
شکل ۲.۵: این شکل مثالی از حالات مختلف عملیات جاروب روی پاره‌خط ed را نشان می‌دهد. عملیات جاروب از نقطه‌ی p_{-1} بر روی ed شروع می‌شود و در نقطه‌ی p_4 خاتمه می‌یابد.

می‌کند که اجتماع این منطقه‌های -حفاظ برابر با scr شده و اشتراک هر دوتایی از آنها تهی شود. به شکل ۳.۵ نگاه کنید. یک زیرناحیه‌ی -موقت به نام tsr در نظر بگیرید. این زیرناحیه‌ی -موقت از طریق فضای اشتراکی بین دو نیم‌خط با scr بدست آمده است (جهت معکوس اشعه‌های تابش). هدف افزاز هر چندضلعی -محدب - پوشایی مانند scr است که داخل آن با این نیم‌خطها برخورد کرده است. تعداد زیرناحیه‌های -موقت داخل scr ، شامل خود scr ، را با علامت $|scr|$ نشان می‌دهیم. همانطور که می‌دانیم خود scr را به عنوان یک زیرناحیه‌ی -موقت در نظر می‌گیریم. برای هر زیرناحیه‌ی -موقت داخل scr ، بجز خود scr ، یک نیم‌خط -شروع^{۱۹} به نام $shl(tsr)$ و یک نیم‌خط -انتهایی با نام $ehl(tsr)$ در نظر می‌گیریم. در واقع داخل scr یک زیرناحیه‌ی -موقت چون tsr بین دو نیم‌خط $ehl(tsr)$ و $shl(tsr)$ است.

شیوه‌ی عمل^{۲۰} به کار گرفته شده در این بخش نیز یک عملیات جاروب است. بر روی چندضلعی -محدب - پوشای داده شده‌ی scr شروع به جاروب می‌کنیم. برای سادگی بیان الگوریتم، فارق از در نظر گرفتن جهت جاروب‌کننده، نیم‌خطهای متناظر با هر زیرناحیه‌ی -موقت tsr را به ترتیب رویت $ehl(tsr)$ و $shl(tsr)$ می‌خوانیم. برای هر دوتایی از نیم‌خطهای شروع و انتهایی (ehl) و (shl) ، از قسمت‌های قبل از شروع این الگوریتم مشخص شده است که کدام چندضلعی -محدب - پوشا $scr \neq$ با این دوتایی متناظر است.

^{۱۹}starting half-line

^{۲۰}strategy



شکل ۳.۵: این شکل نشان دهنده‌ی معنای افزایش یک چندضلعی-محدب-پوشاست. سه چندضلعی-محدب-پوشا در این شکل در نظر گرفته شده است. آن که با علامت scr نمایش داده شده است و دو تای دیگر که آن‌ها را با نام‌های scr_1 و scr_2 می‌خوانیم. شکل (a) یک زیرناحیه‌ی-موقت به نام tsr_1 را با رنگ آبی نمایش می‌دهد. هر حفاظی داخل tsr_1 می‌تواند scr_1 را دیدپذیر-ناحیه‌ای کند. شکل (b) نشان دهنده‌ی tsr_2 است که این زیرناحیه‌ی-موقت چندضلعی-محدب-پوشای scr_1 را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کند. در نهایت، شکل (c) یک افزایش از scr را نشان می‌دهد که زیرناحیه‌های-موقت داخل scr را تبدیل به چهار منطقه‌ی-حفاظ داخل scr کرده است. در شکل (c) برای مثال به منطقه‌ی-حفاظ gr_4 نگاه کنید. این منطقه‌ی-حفاظ به رنگ نارنجی نمایش داده شده است و چندضلعی‌های-محدب-پوشای scr_1 و scr_2 را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کند، اما scr_2 را دیدپذیر-ناحیه‌ای نمی‌کند.

فرآیند افزایش

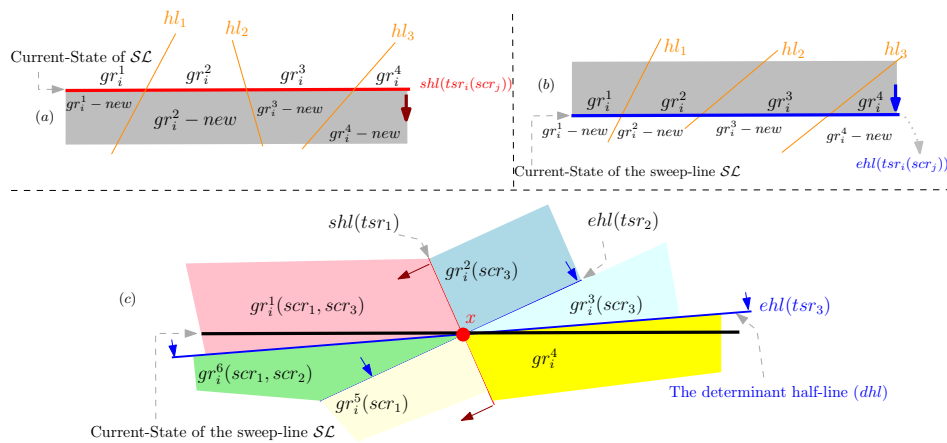
در فرآیند افزایش یک چندضلعی-محدب-پوشا به نام scr_i در نظر می‌گیریم. برای افزایش scr_i از یک خط-جاروب^{۲۱} استفاده می‌کنیم که آن را SL می‌نامیم. عملیات جاروب از یکی از اضلاع scr_i شروع می‌کنیم که آن ضلع را با e نمایش می‌دهیم. خط-جاروب SL در ابتدا تنها شامل e است. خط جاروب به طور موازی با جهت e بر روی scr_i حرکت می‌کند تا زمانیکه به انتهای scr_i برسد. در انتهای scr_i ، SL همه‌ی نقاط scr_i را دیده است.

افزایش نهایی scr_i در نهایت مجموعه‌ای منطقه‌های-حفاظ نتیجه می‌دهد. رویه‌ی افزایش این مجموعه را s_i می‌نامند و به عنوان خروجی برمی‌گرداند. توجه داشته باشید که برای هر منطقه‌ی-حفاظ باید یک لیست-دیدپذیری محاسبه کنیم. برای یک منطقه‌ی-حفاظ به نام gr ، می‌دانیم که لیست-دیدپذیری gr ($VL(gr \in scr_i)$) می‌دانیم که این لیست شامل خود $scr - i$ نیز هست.

خط-جاروب همواره لیستی از منطقه‌های-حفاظ در حال پردازش نگهداری می‌کند. برای هر یک از این منطقه‌ها، باید تصمیم بگیرد که کجا به هر کدام دهد و مرزهای آن‌ها را باید در حرکت خود تعیین کند. این لیست را با علامت $inPL$ نشان می‌دهیم. تعداد منطقه‌های-حفاظ در حال پردازش داخل $inPL$ را با علامت $|inPL|$ نشان می‌دهیم. در حین عمل جاروب، SL ممکن است با سه مورد مختلف روبرو شود: ۱- برخورد به یک نیم‌خط-شروع shl . ۲- برخورد با نقطه‌ی تقاطع چندین نیم‌خط-شروع و یا نیم‌خط-انتهایی. ۳- برخورد با یک نیم‌خط-انتهایی ehl .

یک چندضلعی-محدب-پوشای دلخواه ($scr_k \neq scr_i$) در نظر بگیرید و فرض کنید که زیرناحیه‌ی-موقت $tsr \in$

^{۲۱}Sweep-Line



شکل ۴.۵: موقعیت‌های مختلفی که SC ممکن است با آن‌ها برخورد کند.

scr_i بتواند scr_k را دیدپذیر- ناحیه‌ای کند. همانطور که گفته شد، سه حالت مختلف داریم که در شکل ۴.۵ نمونه‌ای از هر کدام از این سه حالت را می‌بینید. در این شکل شماره‌هایی که به صورت توان بر روی gr قرار گرفته‌اند، نمادهایی هستند که منطقه‌های- حفاظ مختلف را می‌شمارند و نشان‌گذاری می‌کنند. قسمت (a) در این شکل نشان می‌دهد که وقتی که SC به نیم‌خطی چون $shl(tsr_i(scr_j))$ می‌رسد، باید منطقه‌های- حفاظ جدیدی با لیست‌های- دیدپذیری جدید بسازیم. باید چندضلعی- محدب- پوشای scr_j را به لیست- دیدپذیری منطقه‌های- حفاظی که SC از آن‌ها عبور می‌کند اضافه کنیم. شکل (b) یک موقعیت مشابه را به تصویر می‌کشد که در آن SC به یک نیم‌خط- انتهایی $ehl(tsr_i(scr_j))$ می‌رسد. در چنین موقعیتی باید منطقه‌های- حفاظ مورد بررسی فعلی را ببندیم و منطقه‌های- حفاظ جدیدی با لیست- دیدپذیری یکسان اما بدون scr_j ایجاد کنیم. شکل (c) نشان‌دهنده‌ی موقعیتی است که SC به یک نقطه‌ی تقاطع چند نیم‌خط- شروع یا انتهایی می‌رسد. این نقطه‌ی تقاطع را با x نمایش می‌دهیم. در این حالت یک نیم‌خط که اخیراً خط- جاروب با آن مواجه شده است از اهمیت بیشتری برخوردار است. به این نیم‌خط نیم‌خط- تعیین‌کننده^{۲۲} می‌گوییم. نیم‌خط- تعیین‌کننده که از نقطه‌ی x نیز عبور می‌کند می‌تواند یک نیم‌خط- شروع یا یک نیم‌خط- انتهایی باشد. این نیم‌خط را با علامت dhl نمایش می‌دهیم. از آنجا که SC قبلاً با dhl برخورد کرده است، dhl خود دوباره در x منطقه‌ی- حفاظ جدیدی به لیست ما اضافه نخواهد کرد. لیکن، نقطه‌ی x می‌تواند نقطه‌ی انتهایی برخی منطقه‌های- حفاظ باشد و بنابراین باعث ایجاد منطقه‌های- حفاظ جدید برگرفته از نیم‌خط‌های- شروع یا نیم‌خط‌های- انتهایی دیده شده قبلی باشد. به شکل (c) نگاه کنید. منطقه‌های- حفاظ gr^6 که به رنگ سبز و gr^5 که به رنگ کرم نشان داده شده‌اند، منطقه‌های- حفاظی جدیدی هستند که از نقطه‌ی x شروع شده‌اند. gr^3 و gr^1 در نقطه‌ی x تمام شده‌اند. برای دو منطقه‌ی- حفاظ gr^4 و gr^2 تنها کافیست تا لیست- دیدپذیریشان بروز شود. بنابراین براساس نوع نیم‌خط‌های اطراف نقطه‌ی x می‌توان منطقه‌های- حفاظ جدید را ساخت و لیست- دیدپذیری آن‌ها را محاسبه کرد. دقت کنید که اگر $dhl(tsr_i(scr_j))$ خود یک نیم‌خط- شروع یا نیم‌خط- انتهایی باشد، یعنی SC همزمان به یک نیم‌خط و یک نقطه‌ی تقاطع مانند x برسد، آن‌گاه ترکیبی از روش‌های فوق مورد استفاده قرار می‌گیرد و در چنین حالتی بسته به نوع نیم‌خط تعیین‌کننده scr_j باید در لیست برخی منطقه‌های- حفاظ اضافه و از برخی حذف شود و می‌توان به راحتی لیست‌های- دیدپذیری منطقه‌های- حفاظ اطراف x را شکل داد.

^{۲۲}determinative half-line

سه حالتی که خط- جاروب در حین جاروب چندضلعی- محدب- پوشای داده شده‌ی scr_i ممکن است به آن‌ها برخورد کند به قرار زیر هستند:

۱،۲ اگر SL به نیم‌خط- شروع $shl(tsr_i(scr_k))$ رسید. یا در حالت دیگر اگر به نیم‌خط- انتهایی $ehl(tsr_i(scr_k))$ رسید. مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

(آ) تمامی منطقه‌های- حفاظ داخل $inPL$ را می‌بندیم. این کار به این علت است که تمامی منطقه‌های- حفاظی که در لیست قبلی $inPL$ بوده‌اند با رسیدن خط- جاروب به یک خط جدید تمام می‌شوند.

(ب) هر منطقه‌ی- حفاظی که به انتها می‌رسد و بسته می‌شود را به مجموعه‌ی s_i اضافه می‌کنیم (یادآوری: s_i مجموعه‌ی جواب رویه‌ی افراز برای افراز چندضلعی- محدب- پوشای scr_i است).

(ج) متناظر با تعداد نیم‌خطهایی که با نیم‌خط کنونی $shl(tsr_i)$ و یا $ehl(tsr_i)$ ، تعداد مناسبی از چندضلعی‌های- محدب- پوشای جدید ساخته و در لیست $inPL$ قرار می‌دهیم. هر کدام از این منطقه‌های- حفاظ از نیم‌خط $e/shl(tsr)$ شروع شده و مرز^{۳۳} مخصوص خود را دارد.

(د) یک لیست- دیدپذیری برای هر منطقه‌ی- حفاظ جدید داخل $inPL$ می‌سازیم $(VL(gr))$ $gr \in inPL$ و اولین عضو این لیست را scr_i قرار می‌دهیم.

(ه) برای هر منطقه- حفاظ جدید $gr_x \in inPL$ ، اگر در پشت $e/shl(tsr)$ درست مقابل gr_x ، یعنی جایی که به تازگی جاروب شده، منطقه‌ی- حفاظ gr_y قرار داشته است، آنگاه قرار می‌دهیم $VL(gr_x) \leftarrow VL(gr_y)$. توجه کنید که از آنجایی که در هر لحظه تنها یک زیرناحیه‌ی- موقت را بررسی می‌کنیم، دیدپذیر بودن تنها یک چندضلعی- محدب- پوشا در هر مرحله بررسی خواهد شد و تمامی چندضلعی‌های- محدب- پوشای قبلی که قبلاً در یک منطقه خاص دیدپذیر- ناحیه‌ای بوده‌اند همچنان در وضعیت دیدپذیری خود باقی خواهند ماند.

(و) برای هر منطقه‌ی- حفاظ $gr \in inPL$:

اگر SL به نیم‌خط- شروع $shl(tsr_i(scr_k))$ رسیده است، scr_k را به $VL(gr)$ اضافه می‌کنیم.

اما اگر SL به نیم‌خط- انتهایی $ehl(tsr_i(scr_k))$ رسیده است، scr_k را از $VL(gr)$ حذف می‌کنیم.

۳ حالتی که SL به یک نقطه‌ی- تقاطع برسد که این نقطه محل تقاطع k نیم‌خط- شروع (shl) و k' نیم‌خط- انتهایی (ehl) است. این نقطه‌ی تقاطع را x می‌نامیم. بدون کاستی از کلیت مسئله فرض کنید که تمامی این نیم‌خط‌ها بر روی خطوط جداگانه‌ای قرار دارند. همچنین فرض کنید که بیش از یک نقطه‌ی تقاطع بر روی یک خط وجود ندارد. می‌دانیم که $|inPL| = \frac{k+k'}{4}$ (به شکل ۴.۵ (C) نگاه کنید). در حالتی که SL به یک نقطه‌ی تقاطع برسد، تمامی نیم‌خط‌های محل تقاطع شده قبلاً توسط SL دیده شده‌اند. مگر آنکه در همان نقطه نیم‌خطی موازی با SL باشد که روی این نیم‌خط باشد، در اینصورت از ترکیب روش‌های بیان شده استفاده می‌کنیم. در این قسمت فرض می‌کنیم که خط- جاروب فقط به یک نقطه‌ی تقاطع رسیده است. آخرین نیم‌خطی که توسط SL دیده شده است shl یا ehl است. بدون کاستی از کلیت مسئله فرض کنید این نیم‌خط نیم‌خط- شروع $shl(tsr_i(scr_k))$ است. همچنین فرض کنید که این نیم‌خط با جهت SL موازی بوده است. برای این حالت قدم‌های زیر را انجام دهید:

^{۳۳}boundary

- (آ) تمام منطقه‌های-حفاظ داخل $inPL$ را می‌بندیم. این منطقه‌های-حفاظ قبل از رسیدن به $shl(tsr)$ بوده‌اند، جایی که SL قبل از رسیدن به x حرکت می‌کرده است.
- (ب) هر منطقه‌ی-حفاظی که جدیداً بسته شده است را به مجموعه‌ی s_i اضافه می‌کنیم.
- (ج) با توجه به نیم‌خط‌هایی که از x عبور کرده‌اند، منطقه‌های-حفاظ جدید ساخته و در مجموعه‌ی $inPL$ قرار می‌دهیم.
- (د) برای هر منطقه‌ی-حفاظ جدید در $inPL$ یک لیست-دیدپذیری بسازید. یک چنین منطقه‌ی-حفاظی را با علامت gr نشان داده و لیست-دیدپذیری آن را با $VL(gr)$ نشان می‌دهیم.
- (ه) به هر $VL(gr)$ چندضلعی-محدب-پوشای scr_k را اضافه می‌کنیم.
- (و) در مجموعه‌ی s_i به تعداد $\frac{k+k'}{p}$ منطقه‌ی-حفاظ جدید بوجود می‌آید. حال برای هر منطقه‌ی-حفاظ gr را با یک نیم‌خط hl که از منطقه‌ی x عبور کرده عملیات زیر را در نظر می‌گیریم:
- i. اگر hl یک نیم‌خط-شروع به صورت $shl(tsr_i(scr_k))$ باشد و gr بین $shl(tsr_i(scr_k))$ و $ehl(tsr_i(scr_k))$ بیافتد، آنگاه چندضلعی-محدب-پوشای scr_k را به $VL(gr)$ اضافه می‌کنیم.
- ii. اگر hl یک نیم‌خط-انتهایی به صورت $shl(tsr_i(scr_k))$ باشد و gr دیگر بین $shl(tsr_i(scr_k))$ و $ehl(tsr_i(scr_k))$ قرار نداشته باشد، آنگاه چندضلعی-محدب-پوشای scr_k را از $VL(gr)$ حذف می‌کنیم.

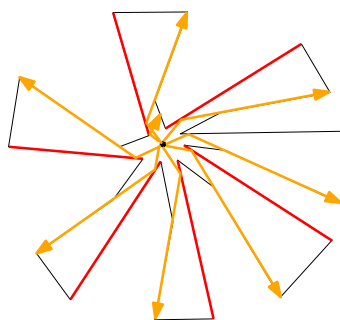
در نظر داشتن scr_i به عنوان ورودی، مجموعه‌ی s_i بدست آمده از مراحل فوق را به عنوان خروجی رویه‌ی افراز برمی‌گردانیم. ایت خروجی مجموعه‌ی افراز شده‌ی چندضلعی-محدب-پوشای داده شده است.

۴.۱.۵ تحلیل

برای اینکه نشان دهیم که انعکاس می‌تواند تاثیر قابل‌توجهی در کم کردن تعداد حفاظ‌های مورد نیاز برای پوشش یک چندضلعی ساده داشته باشد، به شکل ۵.۵ نگاه کنید. این شکل یک چندضلعی ساده را مثال زده که پوشش آن در حالتی که هیچ انعکاسی مجاز نیست به $\Theta(n)$ حفاظ احتیاج دارد و چنانچه یک انعکاس آینه‌ای مجاز باشد تنها یک حفاظ می‌تواند باعث پوشیده شدن تمام نقاط چندضلعی شود و به طور کامل آن را دیدپذیر کند. مابقی این بخش تحلیل الگوریتم ۱.۵ است. ابتدا توجه کنید که براساس خط‌های ۱۱-۴ الگوریتم تمام چندضلعی P لزوماً پوشش داده می‌شود، چراکه اگر اجراهایی که $z = i$ می‌شود را در نظر بگیریم، تمام چندضلعی‌های-محدب-پوشا در لیست-دیدپذیری حداقل یک منطقه‌ی-حفاظ وجود خواهند داشت و بنابراین مجموعه‌ی S حتماً شامل همه‌ی چندضلعی‌های-محدب-پوشا هست و در نتیجه چندضلعی اصلی مطمئناً به طور کامل پوشش داده خواهد شد. توجه داشته باشید که گرچه هر چندضلعی-محدب-پوشا به زیرناحیه‌های-موقت تقسیم می‌شود، اما هر کدام از این زیرناحیه‌های-موقت حتماً آن چندضلعی-محدب-پوشایی که داخلش هستند را در لیست-دیدپذیری خود دارند.

لم ۴.۵ اجرای الگوریتم ۱.۵ به زمان چندجمله‌ای^{۲۴} احتیاج دارد.

^{۲۴}polynomial



شکل ۵.۵: این شکل نشان می‌دهد که استفاده از انعکاس می‌تواند بسیار در کم کردن تعداد حفاظ‌ها و در نتیجه کم کردن هزینه مفید باشد. اضلاع قرمز نشان‌دهنده‌ی اضلاع-انعکاسی هستند. این شکل یک نمونه از حالتیست که مجاز بودن یک انعکاس آینه‌ای باعث می‌شود که تعداد حفاظ مورد نیاز برای پوشش یک چندضلعی ساده را از $\Theta(n)$ به تنها یک حفاظ کاهش داده است.

اثبات. الگوریتم از یک روش تقسیم‌بندی برای چندضلعی کمک می‌گیرد. این روش می‌تواند به طور دلخواه انتخاب شود. بسته به انتخاب تقسیم‌بندی، چندضلعی P به یک مجموعه از چندضلعی‌های محدب تقسیم می‌شود کل تقسیم‌بندی را یک شبکه^{۲۵} می‌خوانیم. هر سلول از این شبکه نشان‌دهنده‌ی یک چندضلعی-محدب پوشاست. یک تحلیل ساده نشان می‌دهد که الگوریتم در زمان چندجمله‌ای برحسب اندازه‌ی شبکه اجرا می‌شود.

اگر پیچیدگی یک چندضلعی-محدب-پوشا را با $|scr|$ نشان دهیم. تعداد اجرای سه حلقه‌ی اول برابر است با: $|scr|^2 |SCR|$ که این تعداد فراخوانی رویه‌ی یافت است. از طرفی رویه‌ی افزاز برای هر چندضلعی-محدب-پوشا فراخوانی می‌شود. بنابراین در مجموع زمان اجرای کل الگوریتم برابر است با: $|scr|^2 |SCR| T(Find) + |SCR| T(Decompose)$. در هر چندضلعی-محدب-پوشا حداکثر $n|SCR|$ زیرناحیه‌ی-موقت وجود دارد. بنابراین حد بالای^{۲۶} تعداد منطقه‌های-حفاظ در مجموعه‌ی نهایی S ، برابر است با $O(n|SCR|^2)$.

هر اجرای الگوریتم ارائه شده در مقاله‌ی [۴۳] به زمان خطی ($O(n)$) احتیاج دارد. با توجه به اینکه هر چندضلعی-محدب-پوشا $|scr|$ ضلع دارد، عملیات جاروب بر روی هر چندضلعی-محدب-پوشا به زمان $O(|scr| \log n)$ احتیاج دارد. بنابراین رویه‌ی-یافت برای هر چندضلعی-محدب-پوشا به زمان $O(n|scr| \log n)$ احتیاج دارد تا تمام زیرناحیه‌های-موقت آن را بیابد. رویه‌ی-افراز یکبار بر روی یک چندضلعی-محدب-پوشا یک خط-جاروب را حرکت می‌کند و زیرناحیه‌های-موقت آن را بررسی می‌کند و منطقه‌های-حفاظ را داخل آن چندضلعی-محدب-پوشا درست می‌کند. لذا هر بار اجرای آن بیش از تعداد منطقه‌های-حفاظ داخل یک چندضلعی-محدب-پوشا زمان نخواهد برد و در کل قسمت افزاز الگوریتم به زمان $O(n|SCR|^3)$ احتیاج دارد.

روی هم رفته، در بدترین حالت الگوریتم ۱.۵ به زمانی حداکثر معادل با $O(n|scr| \log n + n|SCR|^3)$ احتیاج دارد. بنابراین، آنچه که مهم است این است که الگوریتم مورد نظر در زمان چندجمله‌ای بر حسب پیچیدگی شبکه داده شده قابل اجراست. آنچه در اینجا تحلیل شد یک حد بالا برای این الگوریتم است و این مسئله که آیا بتوان در زمان بهتری این

^{۲۵}Grid

^{۲۶}upper bound

مسئله را حل کرد یا تحلیل را بهبود داد فعلا باز^{۲۷} می‌ماند. آنچه می‌دانیم این است که کم کردن پیچیدگی چندضلعی‌های-محدب-پوشا تاثیر قابل توجهی در مدت زمان اجرای این الگوریتم دارد. ■

تحلیل ضریب تقریب

در این بخش اثبات می‌کنیم که ضریب تقریب الگوریتم ۱.۵ برابر است با $\log n$. از آنجایی که می‌دانیم این ضریب تقریب بهترین ضریب تقریبی است که تا به حال برای مسئله‌ی حفاظت-موزه‌ی-هنر با حفاظ‌های-نقطه‌ای ارائه شده است، ارائه‌ی ضریب تقریب یکسان برای حالت تعمیم یافته‌ی آن مسئله نیز دارای اهمیت است.

مشاهده ۵.۵ هر حفاظ در جواب بهینه^{۲۸}، حداقل یک چندضلعی-محدب-پوشا را به طور کامل می‌پوشاند. زیرا خود آن حفاظ حتما در یک چندضلعی-محدب-پوشا قرار گرفته است.

قضیه ۳.۵ ادعا کرد که الگوریتم ۱.۵ برای مسئله‌ی ۲.۵ (حفاظت+انعکاس) یک راه‌حل با ضریب تقریب ثابت پیدا می‌کند. در ادامه به اثبات این قضیه می‌پردازیم. اثبات. در واقع زمان اجرای الگوریتم وابسته به انتخاب شبکه‌ی تقسیم‌شده‌ی اولیه در مرحله‌ی تقسیم \mathcal{P} به چندضلعی‌های-محدب-پوشا است. ضریب تقریب این الگوریتم وابسته به ضریب تقریب مسئله‌ی پوشش-مجموعه دارد. یک نسخه‌ی خاص از مسئله‌ی پوشش-مجموعه به نام مسئله‌ی پوشش-مجموعه‌ی-هندسی وجود دارد. در این نسخه مجموعه‌ی اصلی نقاط یک ناحیه در فضای دوبعدی است که قرار است توسط یک مجموعه از اشیاء هندسی پوشیده شود. و کمترین تعداد این اشیاء مد نظر است که تمامی فضای مورد نظر را بپوشانند. آقای **Kasturi Varadarajan** در سال ۲۰۱۰ [۴۷] یک روش نمونه‌برداری^{۲۹} به نام **Quasi-Uniform sampling** ارائه داد. که روش برای مسئله‌ی پوشش-مجموعه‌ی-هندسی یک ضریب تقریب $2^{O(\log n)} \log h(n)$ می‌داد. که این ضریب تقریب برای زمانیست که پیچیدگی اجتماع مجموعه‌ی اشیاء هندسی برابر با: $mh(m)$ باشد. که m نشان‌دهنده‌ی تعداد اشیاء است. در واقع چنانچه پیچیدگی اجتماع اشیاء هندسی در مجموعه‌ی داده شده نسبت به تعداد این اشیاء حداکثر خطی باشد، الگوریتم آقای **Kasturi Varadarajan** یک تقریب مناسب برای مسئله‌ی پوشش-مجموعه‌ی-هندسی فراهم می‌کند. این نتیجه بعدا توسط آقای **Timothy M. Chan** [۱۱] و دوستانشان گسترش یافت و تقریب مسئله به ضریب ثابت بهبود یافت.

چنانچه هر لیست-دیدپذیری هر کدام منطقه‌های-حفاظ را به عنوان یک شیء هندسی در نظر بگیریم و کل چندضلعی \mathcal{P} را به عنوان ناحیه‌ی داده شده برای پوشش در نظر بگیریم، مسئله‌ی موزه‌ی هنر در حضور انعکاس به یک نمونه از مسئله‌ی پوشش-مجموعه‌ی-هندسی تبدیل می‌شود. حال اگر پیچیدگی اجتماع لیست‌های-دیدپذیری منطقه‌های-حفاظ نسبت به تعداد این لیست‌ها پیچیدگی خطی داشته باشد. می‌توان از روش آقای **Timothy M. Chan** استفاده کرد و ادعا کرد که الگوریتم ۱.۵ برای مسئله‌ی ۲.۵ (حفاظت+انعکاس) یک راه‌حل با ضریب تقریب ثابت پیدا می‌کند.

هر لیست-دیدپذیر مجموعه‌ای از چندضلعی‌های-محدب-پوشا است. و اجتماع همه‌ی آن‌ها شکلی مثل خود چندضلعی

^{۲۷}open

^{۲۸}optimal solution

^{۲۹}Sampling

\mathcal{P} دارد با این تفاوت که پیچیدگی آن به اندازه‌ی تعداد چندضلعی‌های-محدب-پوشای آن تغییر کرده است. بنابراین قانون مورد نیاز برای استفاده از روش آقایان Timothy M. Chan و Kasturi Varadarajan برقرار است. ■

۲.۵ جمع‌بندی فصل

در این فصل، نشان داده‌ایم که ممکن است مجاز بودن یک انعکاس آینه‌ای باعث شود که کمترین تعداد حفاظ لازم برای پوشاندن یک چندضلعی از $\Theta(n)$ به ۱ کاهش پیدا کند. در این فصل یک چندضلعی ساده داده شده را به تعدادی ناحیه افراز کرده و از این افراز کمک گرفتیم و مسئله‌ی حفاظت موزه‌ی هنر با داشتن حفاظ‌های-نقطه‌ای را به مسئله‌ی پوشش-مجموعه تبدیل کردیم. سپس، با استفاده از یک روش ارائه شده قبلی نمونه مسئله‌ی پوشش-مجموعه را با تقریب ثابت حل کردیم. در این روش مسئله در دو مرحله تقریب زده می‌شود که هر مرحله یک ضریب ثابت به تقریب ما اضافه می‌کند. اما در نهایت مسئله با تقریب ثابت حل می‌شود. ابتدا یک روش برای افراز چندضلعی اولیه به تعدادی زیرناحیه انتخاب می‌شود. روش افراز انتخاب شده در ضریب تقریب الگوریتم تاثیری ندارد، لیکن زمان اجرای الگوریتم وابسته به تعداد سلول‌ها افراز انتخاب شده است. هر کدام از سلول‌های افراز انتخاب شده را یک چندضلعی-محدب-پوشا می‌خوانیم. الگوریتم ارائه شده بسته به تعداد چندضلعی‌های-پوشای-محدب چندجمله‌ای است. لذا چنانچه این تعداد چندجمله‌ای نباشد زمان اجرای الگوریتم چندجمله‌ای نخواهد بود. ما از روشی برای افراز استفاده کرده‌ایم که تقریبی برای جواب نهایی افراز اضافه نمی‌کند، ولی پیچیدگی آن لزوماً چندجمله‌ای نیست. این روش توسط آقای É. Bonnet و T. Miltzow در سال ۲۰۲۰ مطرح شده است [۱۰]. این روش یک افراز برای چندضلعی ایجاد می‌کند که پیچیدگی آن نسبت به اندازه‌ی نسبت قطر به کوچکترین فاصله بین دو رأس از چندضلعی چندجمله‌ای است. این اندازه نسبت به پیچیدگی چندجمله‌ای ممکن است چندجمله‌ای نباشد. برای اطلاعات بیشتر در زمینه این نسبت به مقالات [۱۷، ۱۸] مراجعه کنید. لیکن اگر حفاظ‌های-نقطه‌ای را محدود به روئوس این افراز کنیم، می‌توان اثبات کرد که این محدودیت در پاسخ بهینه تاثیری ندارد و در واقع یافتن یک دسته جواب محدود به این افراز یک مجموعه جواب بهینه برای مسئله‌ی اصلی خواهد داد. در ادامه سلول‌های این افراز (چندضلعی‌های-محدب-پوشا) به یکسری زیرناحیه دیگر به نام منطقه‌های حفاظ تقسیم می‌شوند. هر منطقه‌ی-حفاظ نشان دهنده‌ی مکانی داخل چندضلعی است که زیرمجموعه یکسانی از چندضلعی‌های-محدب-پوشا را دیدپذیر-ناحیه‌ای می‌کند. در واقع معادل هر منطقه‌ی-حفاظ یک لیست از چندضلعی‌های-محدب-پوشا وجود دارد. به این لیست لیست-دیدپذیری آن منطقه-حفاظ می‌گویند. حال مسئله آن است که کمترین تعداد منطقه‌های-حفاظ را بدست آوریم که مجموعه‌ی لیست-دیدپذیری آن‌ها تمام چندضلعی را پوشش دهد. این مسئله یک نمونه از یک نسخه‌ی خاص از مسئله‌ی پوشش-مجموعه است که به نام مسئله‌ی پوشش-مجموعه هندسی^{۳۰} مشهور است. این نسخه از مسئله در سال ۲۰۱۱ توسط آقای Chan Timothy و دوستانشان حل شده و یک تقریب ثابت برای آن ارائه شد [۱۱]. با کمک این روش می‌توانیم یک مجموعه جواب پاسخ با تقریب ثابت برای مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر در حضور انعکاس آینه‌ای یگانه بدست آوریم. همچنین از آنجا که فقط در رویه‌ی-یافت دیدپذیری از طریق انعکاس بررسی شده است، می‌توان با ساده‌سازی این رویه الگوریتم را طوری تغییر داد که انعکاس در نظر گرفته نشود و تنها مسئله‌ی معمول حفاظت از موزه‌ی هنر با استفاده از حفاظ‌های-نقطه‌ای مطرح شود. در این صورت چنانچه الگوریتم مطرح شده در این فصل را بتوان با ضریب

^{۳۰}Geometric Set Cover

تقریبی بهتر از $\log(n)$ حل کرد، آنگاه الگوریتمی یافته‌ایم که مسئله‌ی معمول حفاظت از موزه‌ی هنر را با حفاظ‌های - نقطه‌ای را ضریب تقریب بهتری حل کرده است. می‌دانیم که مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر با حفاظ‌های - رأسی را می‌توان با تقریب $\log \log(n)$ حل کرد [۲۵]. لذا شاید بتوان مدل حفاظ‌های - نقطه‌ای این مسئله هم با تقریب بهتری حل کرد. نتیجه مطرح شده در این فصل برای یک کنفرانس معتبر آماده شده است [۴۵].

فصل ۶

جمع‌بندی و کارهای آتی

در این پایان‌نامه یک نسخه‌ی ویژه از مسائل دیدپذیری تحت عنوان دیدپذیری در حضور انعکاس مورد توجه قرار گرفته است. ابتدا دیدپذیری انعکاسی هدف‌دار بررسی شده و در بخش‌های دیگر از نتایج آن استفاده شده است. در ادامه حالات متعددی از مسئله‌ی افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر یک ناظر بررسی شده است. بررسی تاثیر کلی انعکاس بر پاسخ بهینه‌ی مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر مورد دیگری است که متعاقباً مورد بررسی قرار گرفته است. سپس، الگوریتمی با تقریب $O(1)$ برای یافتن محل حفاظها در حالت خاصی از انعکاس داده شد. این الگوریتم برای بدست آوردن یک ضریب تقریب بسیار مناسب‌تر برای حالت معمولی (بدون انعکاس) مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر با کمک حفاظ‌های نقطه‌ای ویژگی‌های مناسبی ارائه داده است. این هدف به عنوان پیشنهادی برای ادامه تحقیق در آینده پیشنهاد می‌شود.

در فصل اول در مقدمه‌ای توضیحاتی راجع به کلیت مسائل داده‌ایم و لیستی از مسائل مورد بحث در پایان‌نامه را مطرح کرده‌ایم. همچنین مختصری از تعاریف مورد نیاز پایان‌نامه در این بخش آمده است، اما در پیوست ب به طور یکجا همه‌ی تعاریف آورده شده است، تا اگر خواننده تمایل داشت تنها بخشی از این مستند را مطالعه کند تعاریف به راحتی و در هر زمان در دسترس باشند. در پیوست آ، به کاربردهای مختلفی که برای این نوع مسائل مد نظر بوده یا ممکن است باشد اشاره شده است. این کاربردها از این جهت مد نظر هستند که می‌توانند در آینده برای تعریف نسخه‌های نزدیک‌تر به واقعیت و تعمیم نسخه‌های مطرح شده‌ی مسئله مورد استفاده قرار گیرند.

در فصل دوم یک ناظر داخل یک چندضلعی ساده P در نظر گرفته‌ایم و یک هدف که برای ناظر دیدپذیر نیست داخل P از ورودی گرفته شده است. ابتدا الگوریتمی ارائه داده‌ایم که در زمان خطی بررسی می‌کند که آیا هیچ قسمتی از هدف توسط ناظر دیدپذیر-انعکاسی می‌شود؟ خود قسمت دیدپذیر هدف در مراحل اول مد نظر نبوده است. در صورت مثبت بودن پاسخ، تمامی این چنین اضلاعی را پیدا کرده و دقیقاً مشخص می‌کنیم کدام قسمت از هر ضلع باید تبدیل به انعکاس دهنده شود. در ادامه در فصل دوم، ناظر و هدف هر دو را به عنوان پاره‌خط در نظر گرفته و الگوریتم را برای حالات متعدد دیدپذیری دو پاره‌خط تعمیم داده‌ایم. همچنین، در زمان خطی بازه‌ی دیدپذیری ناظر روی هدف را نیز به نتایج خروجی الگوریتم مذکور اضافه می‌کنیم. حالات مورد بررسی برای دیدپذیری دو پاره‌خط به این قرار هستند: ۱- تمام نقاط پاره‌خط ناظر به طور کامل تمام پاره‌خط هدف را ببینند. ۲- تمام نقاط ناظر حداقل یک نقطه از پاره‌خط هدف را ببینند. ۳- پاره‌خط ناظر به صورت

دیدپذیری ضعیف پاره‌خط هدف را به طور کامل ببیند. ۴- حداقل یک نقطه از پاره‌خط ناظر حداقل یک نقطه از پاره‌خط هدف را ببیند. از قسمت سوم این الگوریتم در فصل پنجم استفاده شده است. نتایج این بخش در ژورنال TCS در سال ۲۰۱۹ چاپ شد [۴۳].

در فصل سوم مسئله‌ی افزایش مساحت چندضلعی دیدپذیر یک ناظر در حالات متعدد بررسی شده است و نشان داده شده است که این نسخه‌ها از مسئله در گروه مسائل ان‌پی-سخت یا ان‌پی-کامل است. برای هر نسخه از این مسئله یک چندضلعی کاهش ساخته شده و ثابت کردیم که رئوس این چندضلعی‌ها دارای مختصات حقیقی هستند و بنابراین کاهش در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است. مختصات دقیقی برای همه رئوس چندضلعی‌ها داده شد. این نتیجه‌ها نشان می‌دهد که استفاده از انعکاس لزوماً به مسئله‌ی ساده‌تری نمی‌انجامد. در حالت گسترش چندضلعی دیدپذیر یک ناظر به یک میزان حداقل داده شده، مسئله برای حالت ساده‌تر که چندضلعی اصلی یک قیف یا یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف باشد نیز بررسی شد. در فصل سوم ثابت کردیم که گسترش دیدپذیری یک ناظر داخل یک قیف یا یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف تنها با سه انعکاس پخش‌شونده امکان‌پذیر است. در طی اثبات این موضوع دیدیم که اگر تنها یکبار انعکاس پخش‌شونده مجاز باشد، در هر مکانی که یک ناظر قرار داشته باشد بهترین انتخاب برای گسترش دیدپذیری آن ناظر وتر قیف یا چندضلعی دیدپذیر ضعیف است. این نتایج در سال ۲۰۲۱ به یک ژورنال فرستاده شد [۴۶].

در این فصل چهارم و پنجم سعی شده تا از انعکاس به عنوان یک قابلیت اضافه برای حل مسائل دیگر کمک گرفته شود. در فصل چهارم برای حل مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر، از انعکاس پخش‌شونده کمک گرفته شده است. کمترین تعداد حفاظ-رأسی مورد نیاز برای پوشاندن یک چندضلعی ساده متناسب با تعداد انعکاس مجاز کم می‌شود. بدین معنا که هر چه تعداد انعکاس بیشتری بر روی اضلاع چندضلعی مجاز باشد تعداد بهینه‌ی حفاظ مورد نیاز کمتر خواهد شد. نسبت دقیق این تعداد بدست آورده شد. همچنین الگوریتمی ارائه دادیم که با ضریب تقریب $\log(n)$ پاسخ مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر در حضور انعکاس را بدست می‌آورد.

در فصل پنجم حالتی بررسی شد که حفاظ‌ها در مسئله‌ی حفاظت از موزه‌ی هنر بتوانند از انعکاس-آینه‌ای برای پوشاندن چندضلعی کمک بگیرند. نشان داده شد که انعکاس-آینه‌ای یگانه می‌تواند در کاهش تعداد بهینه‌ی حفاظ‌ها بسیار مفید باشد و بنابراین الگوریتمی ارائه دادیم که بتواند محل حفاظ‌های بهینه را در حضور انعکاس-آینه‌ای پیدا کند. اثبات شد که الگوریتم ارائه شده به زمان چندجمله‌ای بر حسب پیچیدگی چندضلعی تقسیم شده احتیاج دارد و می‌تواند با تقریب $O(1)$ مکان حفاظ‌های بهینه را پیدا کند. برای این اثبات، مسئله به یک نمونه مسئله‌ی پوشش-مجموعه تبدیل شد و از الگوریتم Timothy M. Chan و دوستانشان [۱۱] برای حل آن نمونه بهره گرفته شد.

پیوست آ

کاربردهای مسئله

کاربردهای زیادی از مسئله‌ی دیدپذیری در نوشته‌ی [۱۳] آمده است. اما در این قسمت به کاربردهایی که با انعکاس ارتباط بیشتری دارند پرداخته‌ایم.

۱.آ شبکه‌های بی‌سیم

در شبکه‌های بی‌سیم^۱ برای گسترش پهنای سیگنال پوشش داده شده از تقویت‌کننده‌هایی استفاده می‌شود که این تقویت‌کننده‌ها سیگنال را از یک مودم^۲ اصلی دریافت می‌کنند و پس از تقویت سیگنال برای محیطی دیگر ارسال می‌کنند. مسئله‌ی گسترش دیدپذیری در حضور انعکاس در حضور انعکاس‌دهنده‌های نقطه‌ای ساده‌تر از انعکاس‌دهنده‌های خطی است. منظور از انعکاس‌دهنده‌ی خطی، انعکاس‌دهنده‌ای است که یک پاره‌خط یا یک ضلع (دیوار) از محیط (چندضلعی) باشد.

۲.آ دید در فضا

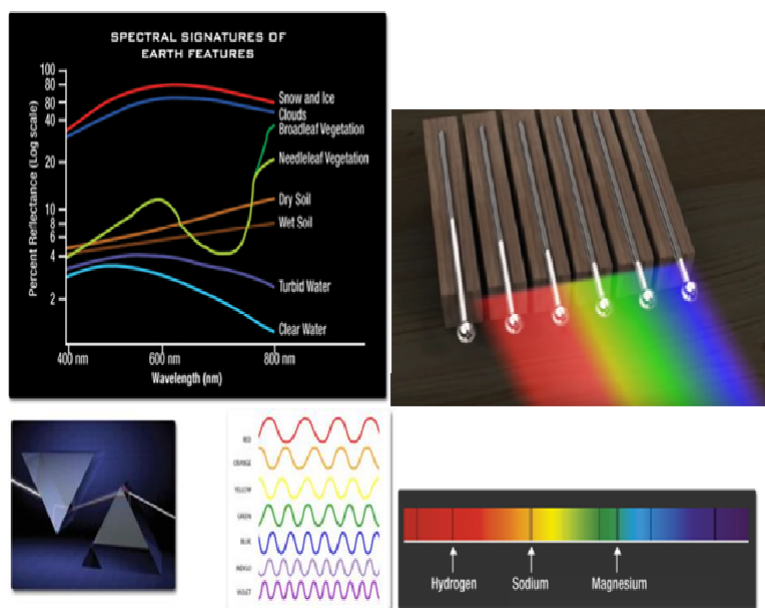
سال‌ها پیش قبل از نیوتن تصور می‌کردند طیف رنگی که در اثر عبور نور سفید از منشور تولید می‌شود در اثر عبور از شیشه است و رنگ‌ها به علت وجود شیشه ایجاد می‌شوند و از نور نیست اما نیوتن با قرار دادن دو منشور نشان داد که طیف رنگی نور مربوط به نور است. زیرا از طیف عبوری از منشور دوم دوباره به نور سفید تبدیل می‌شد. در دهه‌ی ۱۸۰۰ ویلیام هرشل با کمک چند دماسنج و تاباندن نور به آن‌ها تفاوت دمایی رنگ‌های طیف را اندازه می‌گرفت که نور نامرئی مادون قرمز^۳ را کشف کرد (به شکل ۱.آ نگاه کنید).

ما می‌توانیم این قسمت از نور را به صورت گرما حس کنیم. بعضی چیزها بسیار گرم هستند که نور مرئی منتشر می‌کنند اما اجسام سردتر فقط موج infrared ساطع می‌کنند. این نور توسط چشم دیده نمی‌شود اما توسط دوربین‌های مخصوص

^۱Wireless

^۲Modem

^۳infrared

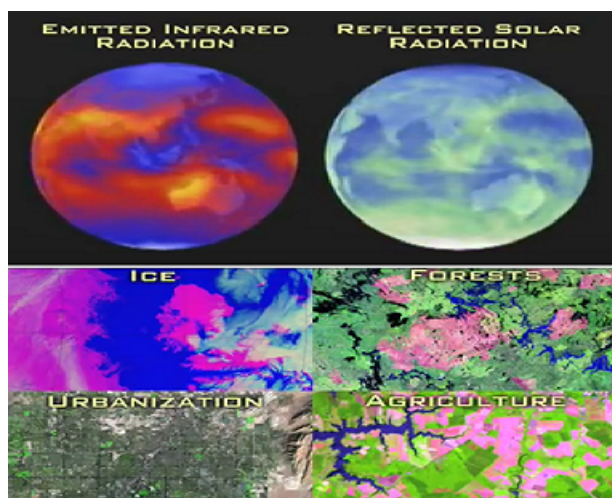


شکل آ.۱: امواج نامرئی مانند مادون قرمز از منابع با فاصله‌ی دور با انعکاس به ما می‌رسند و با کشف جهت و نوع آن‌ها می‌توان اطلاعات زیادی بدست آورد.

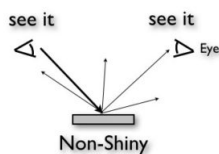
دید می‌شود و مثلاً در شب وجود انسان‌ها یا حیوانات را قابل دید می‌کند. همچنین اجسامی که توسط چشم دیده نمی‌شوند توسط تلسکوپ‌های مادون قرمز قابل دید هستند. امواج مادون قرمز از فاصله‌های بسیار دور از میان گازها و غبار عبور می‌کنند و در معرض دید قرار می‌گیرند. ناسا^۴ توانسته سیارات و ستاره‌های زیادی را توسط این نوع تلسکوپ‌ها کشف کند. از انعکاس پرتوهای نوری از زمین در زمینه‌ی پیش‌بینی آب و هوا و تحقیقات علمی بهره گرفته می‌شود. مثلاً علتی که یک برگ سبز دیده می‌شود این است که رنگ سبز نور از آن منعکس می‌شود ولی بقیه‌ی رنگ‌های نور جذب می‌شوند. علاوه بر رنگ سبز برخی پرتوهای نامرئی در ناحیه‌ی نامعرفی طیف نیز از آن منعکس می‌شوند که توسط ماهواره‌های ناسا قابل تشخیص هستند. و این به محققان کمک می‌کند تا از فضا به مطالعه‌ی گیاه‌شناسی بپردازند. با بررسی این پرتوها محققان می‌توانند نوع درختان و میزان سلامتی یک جنگل و یا مثلاً اینکه جایی که درختان در اثر سیل از بین رفته‌اند را تشخیص دهند. مطالعه‌ی امواج مادون قرمز منعکس شده از زمین و همچنین اشعه‌های منعکس شده‌ی نور خورشید کمک می‌کند که سیستم زمین و بودجه‌ی انرژی آن را بیابیم. می‌توان با بررسی درست این اطلاعات پوشش برف، جنگل، مناطق مسکونی و زمین‌های کشاورزی را کشف کرد (به شکل ۲.۲ نگاه کنید). انعکاس امواج از جهت‌های مختلف از فاصله‌های دور و نزدیک باعث کشف بسیاری از حقایق دنیا شده است. قرار دادن تلسکوپ‌هایی با آینه‌های بزرگ در جاهای مناسب و تشخیص صحیح محل قرار دادن این تلسکوپ‌ها و همچنین تشخیص جهت انعکاس‌ها اطلاعات زیادی از فضای بیکران خارج از جو زمین در اختیار ما قرار خواهد داد. باید توجه داشت که منابع دور در دسترس نیست و تنها بررسی انعکاس امواج ساطع شده و تمیز دادن بین موج منعکس شده و ساطع شده از یک شی بسیار مفید است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه‌ی تحقیقات انجام شده‌ی مربوط به هوا فضا به [؟، ؟] مراجعه نمایید.

^۴NASA



شکل ۲.۰: این شکل مثالی از دید منعکس شده و ساطع شده را نشان می‌دهد که توسط دوربین‌های ناسا گرفته شده است. همچنین در این شکل تفاوت اطلاعات نشان داده شده برای مناطق مختلف زمین مشهود است.



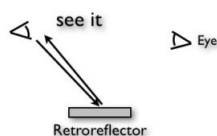
شکل ۳.۰: پرتوهای ناچیزی از سطوح غیردرخشان به چشم می‌رسد.

۳.آ دید در شب

با گذشت روز دید کم می‌شود و این دید ضعیف باعث مشکلات زیادی است به طوریکه بیشترین آمار مجروحات عابران پیاده و دوچرخه‌سواران در شب گزارش شده است. دیدپذیر بودن علت این تفاوت است و در امنیت نقش مهمی دارد. دیدپذیری به معنای توانایی دیدن و دیده شدن است. فاصله‌ای که شخص می‌تواند ببیند یا دیده شود حدوداً دو مایل^۵ است. در این خلاصه‌ی گفته شده تعریف‌های که با در نظر گرفتن جمعیت خاصی مطرح می‌شوند را کنار گذاشته‌ایم. و تنها حالتی که نور با انرژی کم ساطع می‌شود و همچنین تنها برای اجسامی که به طور فیزیکی در شب فعال هستند بررسی کرده‌ایم. در عمل نورهای ضعیفی مثل نور چراغ‌های خیابان و یا چراغ‌های اتومبیل‌ها به سطوح مختلف برخورد می‌کنند و در بسیاری از جهت‌ها منعکس می‌شوند. مقداری از پرتوهای منعکس شده به بیننده می‌رسد ولی این مقدار زیاد نیست و باعث دید ضعیف یک ناظر می‌شود (شکل ۳.آ را ببینید). از سوی دیگر سطوحی به نام **retroreflector** تمامی اشعه را به چشم ناظر باز می‌گردانند. این سطوح از موادی تشکیل شده‌اند که برای انعکاس طراحی شده‌اند (شکل ۴.آ را ببینید).

این نوع سطوح مثلاً برای دید شب در تابلوهای راهنمایی رانندگی مورد استفاده می‌شوند و ارزان نیستند. استفاده‌ی بهینه

^۵mile



شکل آ.۴: سطوح retroreflector

با تعداد کم سطوح در جاده‌سازی و خیابان‌های سطح شهرها کاربرد دارد.^۶

محل قرارگیری این سطوح با توجه به محل ناظر و تعداد بهینه‌ی آن‌ها در مسائل و کاربردهای مختلف از اهمیت زیادی برخوردار است. مثلاً یک خودرو می‌تواند حاوی امکاناتی باشد تا با انعکاس مناسب نور تابیده شده از خودرویی که از جهت مخالف در یک جاده‌ی دو طرفه می‌آید، دید راننده‌ی خود را بهبود دهد. جهت اطلاعات بیشتر به به آدرس‌های موجود در زیرورقی^۷ مراجعه کنید.

آ.۴ آنتن‌های مخابراتی

یک کاربرد که باعث ورود به این مسئله شد به صورت زیر مطرح شد:

مسئله را به این صورت در نظر بگیرید که یک ناحیه در زیر زمین برای حرکت قطار زیرزمینی وجود دارد و قطار بر روی یک مسیر داخل این ناحیه حرکت می‌کند. از آنجا که ناحیه‌ی مذکور داخل زیر زمین است سیگنال‌های مخابراتی مثلاً برای گوشی‌های تلفن همراه در آنجا وارد نمی‌شوند و می‌خواهیم با قرار دادن یک آنتن در دهانه هر ایستگاه مترو، به طریقی توسط تقویت‌کننده‌ها و انعکاس‌دهنده‌ها، سیگنال داخل محیط ناحیه‌ی مورد نظر تقویت شود و نقطه‌ی تاریک (نقطه‌ی کور) نداشته باشیم. مسلماً ترجیح می‌دهیم که با کمترین تعداد انعکاس‌دهنده‌ها این کار انجام گیرد تا هزینه مصرفی کمینه باشد.

برای سادگی فرض می‌کنیم که تنها یک آنتن اصلی در ناحیه مورد نظر ماست و ناحیه خود یک چندضلعی ساده است. آنتن‌ها و انعکاس‌دهنده‌های مخابراتی دارای یک زاویه‌ی خاص هستند به این معنا که تنها در یک جهت خاص مانند آنچه در شکل آ.۵ نمایش داده شده سیگنال مخابراتی را ارسال می‌کنند. این آنتن‌ها دارای برد مشخصی هستند و تنها تا یک فاصله‌ی مشخص برای دریافت کننده قابل استفاده هستند. لیکن برای سادگی فرض می‌شود که برد آنتن‌ها بینهایت است. به آنتن اصلی به عنوان ناظر نگاه می‌کنیم، که فقط این آنتن به طور خاص در همه‌ی جهات سیگنال می‌فرستد.

اگر انعکاس‌دهنده‌ها را ضلع‌های خاصی از چندضلعی در بگیریم که آنتن را به جهت خاصی منعکس می‌کنند، آنگاه مسئله شبیه مسائل بررسی شده دیدپذیری در حضور اضلاع انعکاس‌دهنده خواهد شد (به شکل آ.۶ نگاه کنید). در نظر گرفتن یک پاره‌خط به جای محل دقیقی یک نقطه در مقالات دیگر نیز مورد توجه بوده است. مثلاً در [۱۶] ربات‌ها در داخل چندضلعی

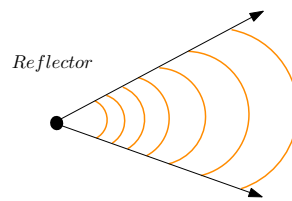
^۶ <https://en.wikipedia.org/wiki/Retroreflector>

^۷ <http://wrenchnrollcollective.com/visibility-and-reflection/>

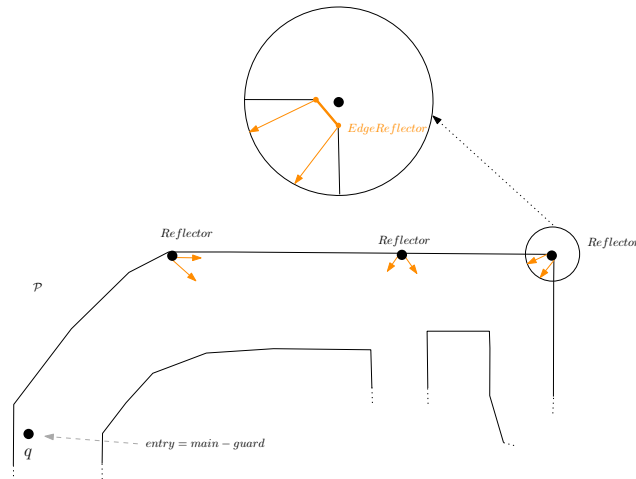
https://www.sgi.sk.ca/handbook/-/knowledge_base/drivers/night-driving-and-low-visibility

<https://www.bergmanengineering.net/how-to-improve-your-driving-visibility-at-night/>

<https://www.exponent.com/services/practices/engineering/human-factors/capabilities/visibility-at-night-in-dark-environments/>



شکل ۵. آ: آنتن‌های مخابراتی معمولاً در یک جهت خاص سیگنال ارسال می‌کنند.



شکل ۶. آ: مسئله‌ی وجود سیگنال در خطوط مترو شبیه به مسئله پیدا کردن محلی برای آینه‌ها در مسئله‌ی افزایش دیدپذیری یک ناظر است. در راه‌حل‌های بیان شده مسئله به این صورت ساده شده است که تنها یک ناظر و ورودی داریم و همه‌ی اضلاع باید آن را ببینند. اما در واقعیت ممکن است یک انعکاس دهنده توسط ناظر (منبع) دیگری پوشش داده شود.

طوری حرکت می‌کنند که مسیر آن‌ها تنها روی یک پاره‌خط است. این مقاله نیز در مورد موضوع حفاظت از موزه‌ی هنر مطالب مفیدی ارائه داده است.

در مسائل نظامی و در مواردی مشابه به آنچه گفته شد نیز کاربردهای زیادی برای مسئله‌ی دیدپذیری در حضور اضلاع انعکاسی مطرح شده است.

پیوست ب

خلاصه‌ای از برخی تعاریف و مسائل مورد استفاده

در این قسمت مجموعه‌ای از تعاریف مورد نیاز و مرسوم برای مسائل دیدپذیری مطرح شده است.

تعریف ب.۱ دیدپذیری^۱:

دیدپذیری آن است که یک ناظر بتواند ببیند یا دیده شود. که این ناظر با توجه به مسئله تعریف می‌شود و می‌تواند یک نقطه یا پاره‌خط یا حتی یک چندضلعی با تعداد رئوس کم باشد. این ناظر می‌تواند ثابت یا متحرک باشد و نوع دیدن و میزان برد دیدن ناظر بسته به مسئله می‌تواند متفاوت تعریف شود.

تعریف ب.۲ چندضلعی ساده^۲:

یک چندضلعی بسته که اضلاع آن متقاطع نیست و حفره^۳ هم ندارد. پیچیدگی یک چندضلعی با تعداد رئوس آن مشخص می‌شود و معمولاً با حرف n داده می‌شود.

تعریف ب.۳ چندضلعی دیدپذیر^۴:

بزرگترین چندضلعی دیدپذیر توسط یک ناظر داخل یک چندضلعی دیگر را چندضلعی دیدپذیر آن ناظر می‌نامند.

تعریف ب.۴ پنجره^۵:

به ضلعی از یک چندضلعی دیدپذیر یک ناظر داخل یک چندضلعی داده شده (P) ، که ضلع یا بخشی از ضلع P نباشد، پنجره گفته می‌شود. به عبارت دیگر یک چندضلعی به نام P در نظر بگیرید که یک ناظر داخل آن است، چندضلعی دیدپذیر این ناظر داخل P را در نظر بگیرید. به هر کدام از اضلاع این چندضلعی دیدپذیر که بخشی از محیط P نباشند پنجره می‌گویند.

^۱ Visibility

^۲ Simple Polygon

^۳ hole

^۴ Visibility Polygon

^۵ Window

تعریف ب.۵ رئوس برگشته یا رئوس محدب^۶:

به یک رأس از یک چندضلعی، رأس محدب یا یا رأس برگشته می‌گویند اگر زاویه‌ی بین دو ضلع متقاطع شده در این رأس در داخل چندضلعی بیش از 180° درجه باشد. رئوس محب تنها رئوسی هستند که می‌توانند مانع دید یک ناظر داخل یک چندضلعی بشوند. حداقل یکی از رأس‌های انتهایی هر پنجره، یک رأس محب است.

تعریف ب.۶ تیرک یا تیکه^۷:

به پنجره‌های کوچکی گفته می‌شود که پوشانده شدن آن‌ها توسط ناظر(ها) جهت هدفی خاص مد نظر است. مثلاً قرار است توسط انعکاس دیده شوند و تعداد و جهت آن‌ها در دیدپذیری اهمیت پیدا می‌کند. یا اینکه توسط حفاظ یا دوربین‌هایی باید پوشش داده شوند و بسته به مسئله محل خاصی را برای دیدپذیر کردن مشخص می‌کنند.

تعریف ب.۷ قیف^۸

شبه- مثلث^۹ ناحیه‌ای از صفحه است که بین سه زنجیر- محدب قرار بگیرد^{۱۰}. و قیف در واقع شبه- مثلثی است که یک زنجیر- محدب آن یک پاره‌خط باشد، که به این پاره‌خط پایه^{۱۱} گفته می‌شود.

هر قیف از طریق پایه خود کاملاً قابل دید است. همچنین یک نقطه حداقل روی ضلع پایه وجود دارد که تمامی قیف را می‌بیند. بنابراین با انتخاب پایه به عنوان ضلع- انعکاسی تمامی قیف دیدپذیر- انعکاسی خواهد شد فارغ از اینکه محل قرارگیری ناظر کجا باشد.

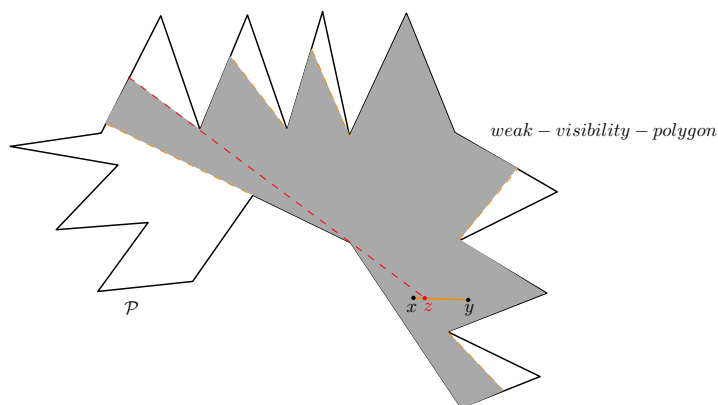
تعریف ب.۸ چندضلعی دیدپذیر ضعیف^{۱۲}

برای یک پاره‌خط تعریف می‌شود و عبارتست از: بزرگترین چندضلعی داخل چندضلعی اصلی، که معمولاً یک چندضلعی ساده است، که توسط حداقل یک نقطه از آن پاره‌خط ناظر دیدپذیر باشد. برای دیدن یک نمونه از این نوع چندضلعی به شکل ب.۱ نگاه کنید. درواقع اگر تمام نقاط یک چندضلعی ساده توسط حداقل یک نقطه از پاره‌خط یا ضلع داخل یا روی آن چندضلعی ساده دیدپذیر باشند، به آن چندضلعی، چندضلعی دیدپذیر ضعیف می‌گویند.

تعریف ب.۹ چندضلعی دیدپذیر کامل^{۱۳}

برای یک پاره‌خط تعریف می‌شود و عبارتست از: بزرگترین چندضلعی داخل یک چندضلعی اصلی که توسط تمام نقاط آن پاره‌خط ناظر دیدپذیر باشد. برای دیدن یک نمونه از این نوع چندضلعی به شکل ب.۲ نگاه کنید. درواقع اگر تمام نقاط

^۶ Reflex vertices or Convex vertices^۷ spike^۸ funnel^۹ pseudo-triangle^{۱۰} <https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudotriangle>^{۱۱} chord^{۱۲} Weakly Visible Polygon^{۱۳} Completely Visible Polygon



شکل ب.۱: در این شکل، یک چندضلعی دیدپذیر ضعیف داخل یک چندضلعی ساده نشان داده شده است. در چندضلعی دیدپذیر ضعیف نشان داده شده، نقطه‌ای روی پاره‌خط ناظر مشخص شده است که قسمت‌هایی را می‌بیند که توسط نقاط انتهایی ناظر دیدپذیر نیستند.

یک چندضلعی ساده توسط تمام نقاط یک پاره‌خط یا ضلع داخل یا روی آن چندضلعی ساده دیدپذیر باشند، به آن چندضلعی، چندضلعی دیدپذیر کامل می‌گویند.

تعریف ب.۱۰ چندضلعی دیدپذیر قوی^{۱۴}

برای یک پاره‌خط تعریف می‌شود و عبارتست از: بزرگترین چندضلعی داخل چندضلعی اصلی که تمام نقاط داخل آن حداقل توسط یک نقطه یا یک بازه‌ی مشخص روی پاره‌خط ناظر دیدپذیر باشند. این نقطه یا بازه می‌تواند تمامی چندضلعی دیدپذیر ناظر را ببیند و به آن بازه‌ی همبند قوی یا بازه‌ی قویا همبند می‌گویند. برای دیدن یک نمونه از این نوع چندضلعی به شکل ب.۳ نگاه کنید.

تعریف ب.۱۱ دیدپذیری قوی^{۱۵}

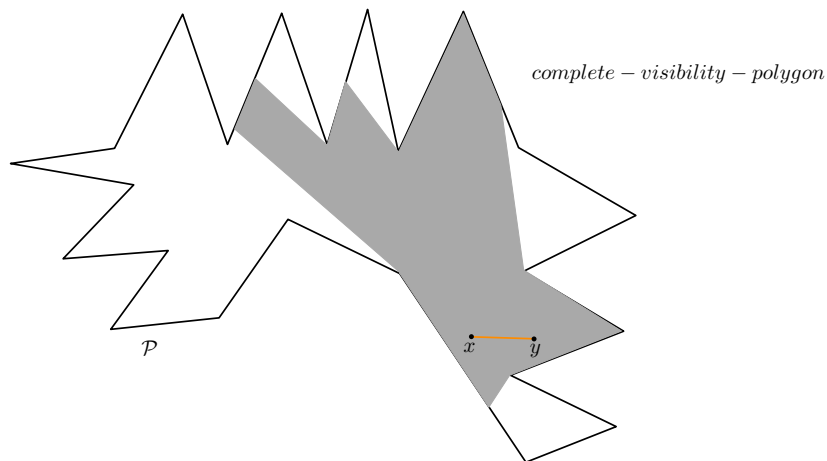
در این مستند، این نوع از دیدپذیری برای یک پاره‌خط به عنوان ناظر تعریف شده است. می‌خواهیم که بزرگترین بازه‌ی از پاره‌خط ناظر را طوری بیابیم که تمام نقاط این بازه، تمام نقاط یک پاره‌خط یا ناحیه‌ای دیگر را به عنوان هدف ببینند. بازه‌ی دیدپذیر قوی یک ناظر ممکن است به اندازه‌ی یک نقطه کوچک باشد یا به اندازه‌ی کل پاره‌خط ناظر باشد. همچنین دیدپذیری برای هر یک از نقاط این بازه می‌تواند دیدپذیری مستقیم باشد و یا از طریق انعکاس بدست آمده باشد. بدیهی است که ممکن است هر نقطه روی این بازه بخشی از هدف را به طور مستقیم و بخشی دیگری از آن را با کمک انعکاس ببیند.

تعریف ب.۱۲ چندضلعی دیدپذیر در حضور انعکاس:

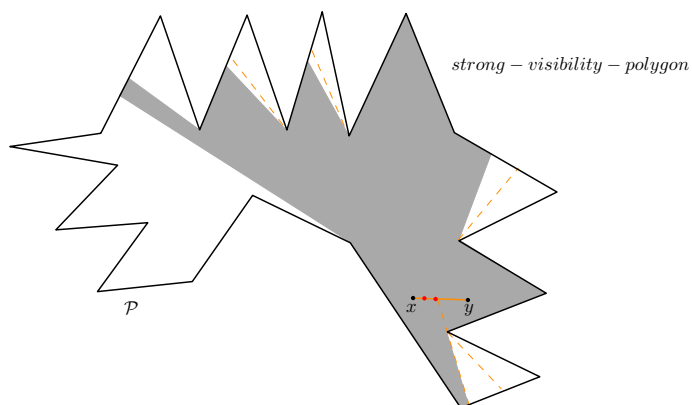
بر اساس نوع مسئله و کاربرد آن، نوعی از انعکاس بر روی اضلاع یک چندضلعی مطرح شده و دیدپذیری یک ناظر با

^{۱۴}Strongly Visible Polygon

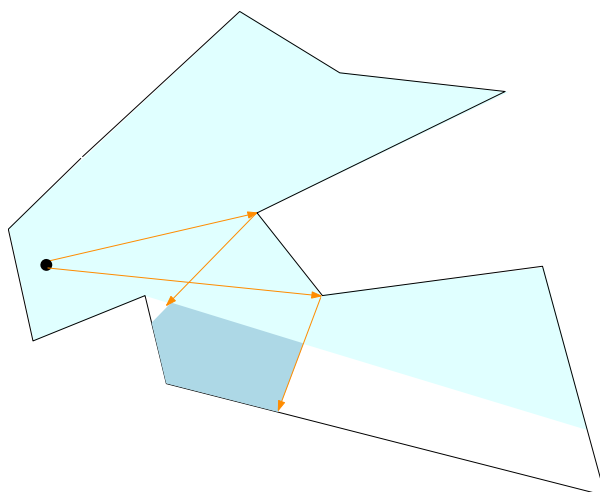
^{۱۵}Strongly Visible



شکل ب.۲: در این شکل، یک مثال از یک چندضلعی دیدپذیر کامل نشان داده شده است.



شکل ب.۳: در این شکل، یک چندضلعی دیدپذیر قوی نشان داده شده است. یک بازه روی پاره‌خط ناظر نمایش داده شده است که چندضلعی دیدپذیر قوی نشان داده شده به طور کامل توسط آن بازه دیده می‌شوند.



شکل ب.۴: در این شکل، یک مثال از یک ضلع-آینه‌ای نشان داده شده است. ناحیه‌ای که با آبی پررنگ نشان داده شده، منطقه‌ایست که در اثر انعکاس آینه‌ای به چندضلعی دیدپذیر ناظر اضافه شده است.

توجه به آن اضلاع-انعکاس دهنده بررسی می‌شود. بدیهی است که چندضلعی دیدپذیر یک ناظر در حضور چنین اضلاعی می‌تواند بزرگتر شود. ممکن است در مسئله خاصی بجای ضلع یک ضلع-انعکاس دهنده یا حتی یک نقطه‌ی انعکاس دهنده در وسط یک چندضلعی مورد بررسی قرار بگیرد. مسئله‌های مرتبط با شبکه‌های بی‌سیم مثالی از این نوع مسائل هستند.

تعریف ب.۱۳ انعکاس آینه‌ای^{۱۶}:

نوعی از انعکاس است که در آن زاویه منعکس شده‌ی یک اشعه نور ثابت است و معمولاً زاویه‌ی تابیده شده دقیقاً برابر با زاویه‌ی منعکس شده در نظر گرفته می‌شود. این چنین بازتابشی دقیقاً مشابه یک آینه در فضای دو بعدی است لذا به این نوع از انعکاس، انعکاس آینه‌ای می‌گویند. شکل ب.۴ را ببینید.

تعریف ب.۱۴ ضلع-آینه‌ای^{۱۷}:

ضلعی که انعکاس از نوع آینه‌ای بر روی آن بررسی می‌شود را ضلع-آینه‌ای می‌نامیم.

تعریف ب.۱۵ انعکاس پخش‌شونده^{۱۸}:

نوعی از انعکاس است که در آن به هر طریقی که یک اشعه‌ی نور به یک انعکاس دهنده برخورد کند، انعکاس دهنده فارغ از جهت تابیده شده‌ی اشعه آن را در همه‌ی جهات ($0 \leq \Pi$) بازتاب می‌دهد. در واقع مانند یک نیم‌صفحه برای ناظر دیدپذیری ایجاد می‌کند.

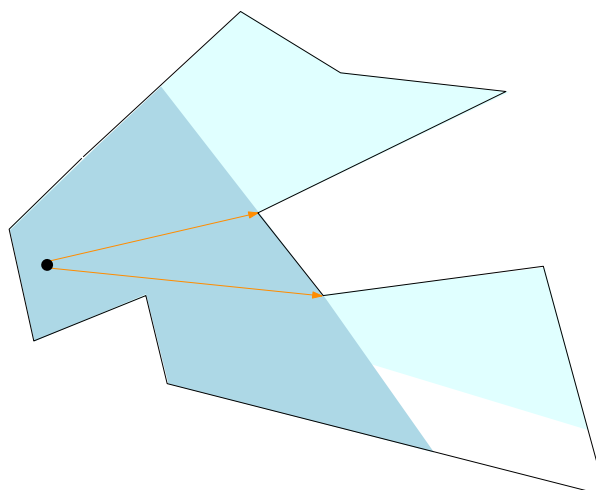
تعریف ب.۱۶ ضلع-انعکاس دهنده^{۱۹}:

^{۱۶}Specular

^{۱۷}mirror-edge

^{۱۸}Diffuse

^{۱۹}reflecting-edge



شکل ب.۵: در این شکل، یک مثال از یک انعکاس پخش‌شونده توسط یک ضلع-انعکاس‌دهنده نشان داده شده است. ناحیه‌ای که با آبی پررنگ نشان داده شده، منطقه‌ایست که در اثر انعکاس پخش‌شونده برای ناظر دیدپذیر شده است. در این شکل ناحیه‌ی دیدپذیر شده فارغ از چندضلعی دیدپذیر ناظر نشان داده شده است.

هر ضلعی که یکی از انواع انعکاس از نوع آینه‌ای یا پخش‌شونده بر روی آن بررسی می‌شود را ضلع-انعکاس‌دهنده می‌نامیم. بدیهی است که هر ضلع-آینه‌ای خود یک ضلع-انعکاس‌دهنده نیز هست و صرفاً جهت سادگی و تأکید بر نوع انعکاس در برخی موارد از اسم ضلع-آینه‌ای استفاده کرده‌ایم.

تعریف ب.۱۷ دیدپذیر-انعکاسی:

چنانچه قسمتی از یک ناحیه‌ی غیردیدپذیر توسط یک ناظر داخل یک چندضلعی، توسط یک انعکاس‌دهنده دیدپذیر شود، آن قسمت را دیدپذیر-انعکاسی می‌نامند. چنانچه یک ضلع-انعکاس‌دهنده به نام e باعث دیدپذیر شدن یک منطقه داخل یک چندضلعی شود، به آن منطقه دیدپذیر شده، منطقه‌ی e -دیدپذیر می‌گویند.

تعریف ب.۱۸ دیدپذیر-ناحیه‌ای^{۲۰}:

در این مستند نوعی از دیدپذیری تعریف شده است که مقصود از تعریف آن اطمینان از دیدپذیری تمامی نقاط یک ناحیه‌ی هدف است. این ناحیه‌ی هدف در این پایان‌نامه یک چندضلعی محدب^{۲۱} در نظر گرفته شده است. اما می‌توان از چنین تعریفی برای دیگر انواع چندضلعی‌ها نیز استفاده کرد.

در این نوع دیدپذیری یک ناظر که می‌تواند خود یک پاره‌خط یا یک چندضلعی دیگر باشد در نظر گرفته می‌شود. یک ناحیه‌ی هدف برای ناظر دیدپذیر-ناحیه‌ای است اگر و فقط اگر تمامی نقاط آن برای تمامی نقاط ناظر دیدپذیر باشد. که این دیدپذیری می‌تواند دیدپذیری مستقیم و یا با کمک انعکاس صورت گرفته باشد.

^{۲۰} Area-Visible

^{۲۱} Convex Hull

تعریف ب.۱۹ دیدپذیری چندگانه^{۲۲}:

در حضور انعکاس دهنده‌ها اینکه هر اشعه‌ی نور چندبار مجاز است تا بر روی انعکاس دهنده‌ها بازتاب شود و همچنان ناظر قادر به دیدن از طریق انعکاس دهنده‌های میانی است، خود قابل تعریف است. به زبان دیگر تعداد انعکاس دهنده‌های میانی مجاز برای دیدپذیری یک ناظر چندگانه بودن دیدپذیری را تعیین می‌کند. معمولاً مسائل در دو حالت انعکاس یگانه^{۲۳} و انعکاس چندگانه بررسی می‌شوند. همچنین ممکن است تعداد انعکاس مجاز مطرح شود.

تعریف ب.۲۰ مسئله‌ی پوشش-مجموعه^{۲۴}:

این مسئله شامل یک مجموعه‌ی متناهی S و یک خانواده به نام T از زیرمجموعه‌های S است به طوری که هر عنصر S حداقل در یکی از زیرمجموعه‌های T وجود دارد. بدنبال کمترین تعداد از زیرمجموعه‌ها در T هستیم که اجتماع زیرمجموعه‌های انتخابی تمام اعضای S را پوشش دهد. در واقع اگر یک پاسخ از مسئله را X بنامیم. می‌دانیم که: $S = \bigcup_{x \in X} x$ و می‌دانیم که X در بین تمام زیرمجموعه‌های T دارای کمترین تعداد عضو است.

مسئله‌ی پوشش-مجموعه، یک مسئله بهینه‌سازی است. این مسئله در گروه مسائل ان‌پی-سخت^{۲۵} است. در این مستند روش اکتشافی حریصانه‌ای را با نسبت تقریب لگاریتمی استفاده کرده‌ایم.

تعریف ب.۲۱ مسئله‌ی پوشش-مجموعه هندسی^{۲۶}:

این مسئله یک نسخه‌ی هندسی از مسئله‌ی کلی پوشش-مجموعه است که مجموعه‌ی متناهی S در آن یک مجموعه از نقاط است و زیرمجموعه‌ها توسط اشکال هندسی نمایان شده‌اند. مثلاً ممکن است مجموعه‌ای از نقاط در یک صفحه مد نظر باشد که توسط تعداد زیادی از دایره‌ها پوشیده شده است. در چنین حالتی کمترین تعداد دایره که بتواند کل مجموعه‌ی نقاط را پوشش دهد، پاسخ مطلوب مسئله است.

تعریف ب.۲۲ مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها^{۲۷}:

مسئله‌ی جمع-زیرمجموعه‌ها در حالت کلی این است که اگر مجموعه‌ای از اعداد صحیح داشته باشیم آیا زیرمجموعه ناتهی وجود دارد که جمع اعضایش برابر صفر شود؟ بدیهی است که می‌توان همه‌ی اعداد را قدرمطلق کوچکترین عدد جمع کرد و هدف مسئله را طور قرار داد که مجموع اعداد زیرمجموعه‌ی منتخب برابر با یک عدد داده شده شود. به عبارت دیگر، صورت دیگر این مسئله این است که آیا زیرمجموعه ناتهی از مجموعه‌ای از اعداد صحیح وجود دارد که جمع اعضایش برابر عدد صحیح s شود؟ مسئله‌ی جمع زیرمجموعه‌ها ان‌پی است و احتمالاً یکی از آسان‌ترین آن‌ها است.

تعریف ب.۲۳ مسئله‌ی ۳-صدق‌پذیری^{۲۸}: ۳-صدق‌پذیری یک حالت خاص از k -SAT یا به‌طور ساده‌شده SAT است که هر عبارت دقیقاً $k = 3$ متغیر را شامل می‌شود. این یکی از ۲۱ مسئله ان‌پی-کامل کارپ است.

^{۲۲}Multiple Reflections^{۲۳}Single Reflection^{۲۴}Set Cover^{۲۵}NP-hard^{۲۶}Geometric Set Cover^{۲۷}Subset-Sum^{۲۸}3-SAT

مسئله صدق‌پذیری یک مسئله تصمیم است که نمونه‌ی آن یک عبارت بولی می‌باشد که فقط با AND ، OR و NOT متغیرها و پرانتز نوشته شده است. سؤال این است که: آیا می‌توان به متغیرها مقادیر درست^{۲۹} و نادرست^{۳۰} داد تا عبارت مورد نظر همواره درست باشد؟ یک فرمول از منطق گزاره‌ای صدق‌پذیر (ارضایپذیر)^{۳۱} است اگر به متغیرهای آن بتوان مقادیر منطقی داد تا فرمول همواره درست باشد.

تعریف ب.۲۴. مسئله حفاظت از موزه هنر^{۳۲}:

مسئله این است که یک چندضلعی ساده P داده شده است و می‌خواهیم کمترین تعداد دوربین را داخل این چندضلعی قرار دهیم تا همه‌ی نقاط P پوشش داده شوند. از آنجایی که دوربین‌ها جهت حفاظت موزه مورد استفاده قرار خواهند گرفت، به آن‌ها محافظ^{۳۳} گفته می‌شود. در این مسئله برای سادگی فرض می‌شود که دید دوربین‌ها ۳۶۰ درجه است و برد دید دوربین‌ها به اندازه کافی زیاد است. اینکه محل مجاز دوربین‌های حفاظتی در کدام قسمت‌های P باشد، نسخه‌های مختلفی از مسئله را رقم می‌زند. چنانچه دوربین‌ها فقط مجاز به نصب بر روی رئوس P باشند، آن‌ها را حفاظ راسی^{۳۴} می‌نامیم. چنانچه در هر نقطه‌ی داخل چندضلعی مجاز به گذاشتن دوربین‌ها باشیم، آن‌ها را حفاظ نقطه‌ای^{۳۵} می‌نامیم. اگر نقاطی ثابت داخل چندضلعی برای هر کدام از حفاظ‌ها در نظر گرفته شود به آن‌ها حفاظ‌های ایستا^{۳۶} می‌گویند. اگر یک دوربین مجاز باشد تا بر روی یک پاره‌خط حرکت کند، به این نوع حفاظ حفاظ متحرک می‌گوییم و چنانچه بجای یک پاره‌خط دوربین‌ها مجاز به حرکت در طول اضلاع P باشند، در آن صورت به آن‌ها حفاظ ضلعی^{۳۷} می‌گوییم.

^{۲۹} True

^{۳۰} False

^{۳۱} satisfiable

^{۳۲} Art Gallery Problem

^{۳۳} Guard

^{۳۴} Vertex Guards

^{۳۵} Points Guards

^{۳۶} Stationary Guards

^{۳۷} Edge Guards

- [1] A. Aggarwal. The art gallery theorem: its variations, applications and algorithmic aspects. *Ph.D. thesis, The Johns Hopkins University, Baltimore, MD*, 1984.
- [2] B. Aronov, A. Davis, T. Dey, S. Pal, and D. Prasad. Visibility with multiple reflections. *Discrete & Computational Geometry*, 20:61–78, 1998.
- [3] B. Aronov, A. Davis, T. Dey, S. Pal, and D. Prasad. Visibility with one reflection. *Discrete & Computational Geometry*, 19:553–574, 1998.
- [4] D. Avis and G. T. Toussaint. An optional algorithm for determining the visibility of a polygon from an edge. *IEEE Transactions on Computers*, (C-30):910–1014, 1981.
- [5] L. Barba, M. Korman, S. Langerman, and R. I. Silveria. Computing a visibility polygon using few variables. *Theoretical Computer Science*, 47(9):918–926, 2014.
- [6] P. Bhattacharya, S. K. Ghosh, and S. Pal. Constant approximation algorithms for guarding simple polygons using vertex guards. *arXiv:1712.05492*, 2017.
- [7] P. Bhattacharya, S. K. Ghosh, and B. Roy. Approximability of guarding weak visibility polygons. *Discrete Applied Mathematics*, (228):109–129, 2017.
- [8] E. Bonnet and T. Miltzow. An approximation algorithm for the art gallery problem. *EuroCG*, pages 195–198, 2016.
- [9] E. Bonnet and T. Miltzow. An approximation algorithm for the art gallery problem. *Proceedings of the 33rd International Symposium on Computational Geometry (SoCG'17)*, (20), 2017.
- [10] □. Bonnet and T. Miltzow. Parameterized hardness of art gallery problems. *ACM Transactions on Algorithms*, (16(4)), 2020.
- [11] T. M. Chan, E. Grant, and J. K. M. Sharpe. Weighted capacitated, priority, and geometric set cover via improved quasi-uniform sampling. *Proceedings of the 2012 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2012.
- [12] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, (18).
- [13] D. Cohen-Or. Visibility, problems, techniques and applications. *Tel-Aviv University, Course Notes for SIGGRAPH*, 2000.
- [14] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry Algorithms and Applications, third edition*. Springer, 2008.

- [15] H. El Gindy and D. Avis. A linear algorithm for computing the visibility polygon from a point. *Journal of Algorithms*, 2(2):186–197, 1981.
- [16] H. Emadi, T. Gao, and S. Bhattacharya. Visibility-based target-tracking game: Bounds and tracking strategies. *IEEE Robotics and Automation Letters*, pages 1917–1924, 2017.
- [17] J. Erickson. Nice point sets can have nasty delaunay triangulations. *Proc. 17th Symp. Comp. Geom.*, pages 96–105, 2001.
- [18] J. Erickson. Dense point sets have sparse delaunay triangulations: or “...but not too nasty”. *Proc. 13th Symp. Disc. Algo.*, page 125–134, 2002.
- [19] U. Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *J. ACM*, (45(4)):634–652, 1998.
- [20] E. Fink and D. Wood. Computational problems in strong visibility. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 1997.
- [21] S. K. Ghosh. Approximation algorithms for art gallery problems. *Proc. Canadian Information Processing Society Congress*, pages 429–436, 1987.
- [22] S. K. Ghosh. Approximation algorithms for art gallery problems in polygons. *Discrete Appl. Math.*, 158(6):718–722, mar 2010.
- [23] S. K. Ghosh, A. Maheshwari, S. P. Pal, S. Saluja, and C. E. V. Madhavan. Characterizing and recognizing weak visibility polygons. *Computational Geometry: Theory and Applications. Elsevier*, (3):213–233, 1993.
- [24] M. J. Katz. A ptas for vertex guarding weakly-visible polygons. *An extended abstract, arXiv:1803.02160*, 2018.
- [25] J. King and D. Kirkpatrick. Improved approximation for guarding simple galleries from the perimeter. *Discrete Computer Geometry*, (46):252–269, 2011.
- [26] V. Klee. Is every polygonal region illuminable from some point? *Computational Geometry: Amer. Math. Monthly*, (76):180, 1969.
- [27] B. Kouhestani, M. Asgaripour, S. S. Mahdavi, A. Nouri, , and A. Mohades. Visibility polygons in the presence of a mirror edge. *Proc. 26th European Workshop on Computational Geometry.*, (26):209–212, 2010.
- [28] D. T. Lee and A. Lin. Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, (32):276–282, 1986.
- [29] N. Liow. Sight & light how to create 2d visibility/shadow effects for your game. 2014.
- [30] J. I. Munro, M. H. Overmars, and D. Wood. Variations on visibility. In *Proceedings of the Third Annual Symposium on Computational Geometry, SCG '87*, pages 291–299, New York, NY, USA, 1987. Association for Computing Machinery.
- [31] T. M. Nicholl, D. T. Lee, Y. Z. Liao, and C. K. Wong. On the x-y convex hull of a set of x-y polygons. *BIT Numerical Mathematics*, 23:456–471, 1983.
- [32] M. Nouri and M. Ghodsi. Weak visibility queries of line segments in simple polygons and polygonal domains. *Int. J. Comput. Math.*, pages 721–738, 2018.
- [33] J. O’Rourke. Art gallery theorems and algorithms. *Oxford University Press.*, 1987.

- [34] J. O'Rourke and K. Supowit. Some np-hard polygon decomposition problems. *IEEE Trans. Inf. Theory*, (29(2)):181—189, 1983.
- [35] T. Ottmann, E. Soisalon-Soininen, and D. Wood. On the definition and computation of rectilinear convex hulls. *Inf. Sci.*, 33:157–171, 1984.
- [36] A. Patel. 2d visibility algorithm. 2014.
- [37] A. Patel. Blobs in games: 2d visibility. 2014.
- [38] S. S. R. Raz. A sub-constant error-probability low-degree-test and a sub-constant error-probability pcp characterization of np. *Proc. 29th ACM Symp. Theory of Computing. El Paso, TX*, pages 475–484, 1997.
- [39] G. J. E. Rawlins. Explorations in restricted-orientation geometry. *PhD thesis, University of Waterloo, Ontario*, 1987.
- [40] S. Schuierer. On generalized visibility. *PhD thesis, University at Freiburg, Germany*, 1991.
- [41] G. T. Tokarsky. Polygonal rooms not illuminable from every point. *American Mathematical Monthly*, (102):867–879, 1995.
- [42] A. Vaezi and M. Ghodsi. How to extend visibility polygons by mirrors to cover invisible segments. In S.-H. Poon, M. S. Rahman, and H.-C. Yen, editors, *WALCOM: Algorithms and Computation*, pages 42–53, Cham, 2017. Springer International Publishing.
- [43] A. Vaezi and M. Ghodsi. Visibility extension via reflection-edges to cover invisible segments. *Theoretical Computer Science*, 2019.
- [44] A. Vaezi and M. Ghodsi. Extending visibility polygons by mirrors to cover specific targets. *EuroCG 2013*, pages 13—16, 2013.
- [45] A. Vaezi, B. Roy, and M. Ghodsi. Art gallery plus single specular-reflection. *arXiv:2108.10940*, 2021.
- [46] A. Vaezi, B. Roy, and M. Ghodsi. Visibility extension via reflection. *arXiv:2011.03107*, 2021.
- [47] K. R. Varadarajan. Weighted geometric set cover via quasi-uniform sampling. *Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing, STOC*, page 641–648, 2010.
- [48] C. Xu. A generalization of the art gallery theorem with reflection and a cool problem. <https://chaoxuprime.com/posts/2011-06-06-a-generalization-of-the-art-gallery-theorem-with-reflection-and-a-cool-problem.html>, 2011.
- [49] R. H. G. ūting. Conquering contours: Efficient algorithms for computational geometry. *PhD thesis, Universitat Dortmund, Germany*, 1983.

Abstract

This document deals with the following results in details:

1. Given a simple polygon \mathcal{P} with n vertices, the visibility polygon (VP) of a point q , or a segment \overline{pq} inside \mathcal{P} can be computed in linear time. It is known that the visibility polygon of a point inside a polygon in the presence of a mirror can be computed in linear time. We propose a linear time algorithm to extend the VP of a viewer (point or segment) by converting some edges of \mathcal{P} into mirrors (reflecting-edges with specular type of reflection), such that a given non-visible segment \overline{uw} can also be seen from the viewer. Various definitions for the visibility of a segment, such as weak, strong, or complete visibility, are considered. Our algorithm finds every edge that, when converted to a mirror, makes \overline{uw} visible to our viewer. We find out exactly which interval of \overline{uw} becomes visible, by every edge muddling as a mirror, all in linear time. In other words, we present an algorithm that for every edge e of \mathcal{P} reveals precisely which part of \overline{uw} is mirror-visible through e .
2. As mentioned, we study visibility with specular and diffuse reflections. The number of times a ray can be reflected can be taken as a parameter. We prove that finding edges to add exactly k units of area to the visibility polygon of a query point q in most cases is NP-complete, and its minimization is NP-hard. These cases contain single and multiple, either with secular or diffuse reflections. Considering the diffuse type of reflection when the multiple reflection is allowed, even more than two reflections, the problem remains open. Also, the problem of finding edges to add *at least* k units of area with the minimum number of diffuse reflecting-edges is NP-hard too. Extending visibility polygons with specular reflection considering multiple reflections remains open.
Furthermore, we illustrate that if \mathcal{P} is a funnel or a weak visibility polygon, then the problem of extending visibility polygons via diffuse reflecting-edges becomes more straightforward and can be solved in polynomial time.
3. In the document, we also study a variant of the Art Gallery problem in which the “walls” can be replaced by *reflecting-edges*, which allows the guard to see further and thereby

see a larger portion of the gallery. Clearly, if we let an edge of the polygon allow reflections, then the visibility region should be changed accordingly.

Given a simple polygon \mathcal{P} , in the Art Gallery problem, the goal is to find the minimum number of guards needed to cover the entire \mathcal{P} , where a guard is a point and can see another point q when \overline{pq} does not cross the edges of \mathcal{P} . This document studies a variant of the Art Gallery problem in which the boundaries of \mathcal{P} are replaced by single specular-reflection edges, which allows the view rays to reflect once per collision with an edge. This property allows the guards to see through the reflections and thereby see a larger portion of the polygon. For this problem, the position of the guards in \mathcal{P} can be determined with our proposed $\mathcal{O}(1)$ -approximation algorithm.

We also prove that if \mathcal{P} (possibly with holes) can be guarded by α guards without reflections, then \mathcal{P} can be guarded by at most $\lceil \frac{\alpha}{1+\lfloor \frac{r}{4} \rfloor} \rceil$ guards when r diffuse reflections are permitted.

Additionally, we show that for vertex guards, the art gallery problem considering r reflections, for both the diffuse and specular reflection are solvable in $\mathcal{O}(n^{4^{r+1}+2})$ time, giving an approximation ratio of $\mathcal{O}(\log n)$.

Keywords: *Visibility Polygon, Art Gallery, Mirror, Specular-Reflection, Diffuse-Reflection, Single-Reflection, Multiple-Reflection*



Sharif University of Technology
Department of Computer Engineering

Ph.D. Thesis

Visibility via Reflection

By:

Arash Vaezi

Supervisor:

Prof. Mohammad Ghodsi

September 2021