پاسخ امتحان ترمودینامیک و مکانیک آماری

۳۱ اردیبهشت ۱۳۸۹

۱.(الف) چون سطح مقطع لوله‌ی گاز خیلی بیش‌تر از سوراخ است سرعت گاز در لوله خیلی کمتر از سرعت گاز هنگام بیرون آمدن خواهد بود. بنابر این سرعت گاز درون لوله را صفر می‌گیریم. بنابر این داریم:

$$\frac{p_۲}{\rho_۲} + u(T_۲) + \frac{۱}{۲}V^۲ = \frac{p_۱}{\rho_۲} + u(T_۱) \qquad (۱)$$

که انرژی درونی در واحد جرم را برای یک گاز ایده‌آل در نظر می‌گیریم یعنی :

$$u(T) = \frac{۱}{M}C_v T \qquad (۲)$$

چگالی گاز ایده‌آل برحسب فشار به صورت

$$\rho = \frac{pM}{RT} \qquad (۳)$$

از بی‌دررو منبسط شدن گاز هم می‌دانیم

$$p_۱^{\frac{۱-\gamma}{\gamma}} T_۱ = p_۲^{\frac{۱-\gamma}{\gamma}} T_۲ \qquad (۴)$$

پس با جای گذاری این رابطه‌ها در معادله‌ی ۱ و حذف کمیت مجهول $T_۲$ خواهیم داشت:

$$\frac{p_۲ R \left(\frac{p_۱}{p_۲}\right)^{\frac{۱-\gamma}{\gamma}} T_۱}{p_۲ M} + \frac{۱}{M}C_v \left(\frac{p_۱}{p_۲}\right)^{\frac{۱-\gamma}{\gamma}} T_۱ + \frac{۱}{۲}V^۲ = \frac{p_۱ R T_۱}{p_۱ M} + \frac{۱}{M}C_v T_۱ \qquad (۵)$$

با حل این معادله سرعت به دست می‌آید:

$$V = \sqrt{\frac{۲RT_۱}{M}\left(۱ + \frac{C_v}{R}\right)\left(۱ - \left(\frac{p_۱}{p_۲}\right)^{\frac{۱-\gamma}{\gamma}}\right)} \qquad (۶)$$

با جایگذاری کمیت‌ها برای سرعت به مقدار $V = ۸۲\frac{m}{s}$ می‌رسیم. بد نیست برای مقایسه یادآوری کنم که سرعت صوت $۳۴۰\frac{m}{s}$ است.

(ب) گاز بعد از خارج شدن دمای $T_۲ = ۲۹۸K$ دارد (رابطه‌ی ۴). با استفاده از معادله‌ی حالت گاز ایده‌آل می‌توان مقدار مول در واحد حجم را به دست آورد. $\frac{n}{V} = \frac{p_۲}{RT_۲}$

با جایگذاری اعداد داریم: $\frac{n}{V} = ۴۰mol/m^۳$

شار گاز با ضرب سرعت در سطح مقطع سوراخ به دست می‌آید که برابر با $۶/۳ \times ۱۰^{-۵}m^۳/s$ است. پس مقدار مول گاز در واحد زمان که خارج می‌شود برابر $r = ۲/۵ \times ۱۰^{-۳}mol/s$ است.

(ج) گرمای واکنش از اختلاف آنتالپی به دست می‌آید. طبق جدول و با در نظر گرفتن واکنش و ضریب اعداد در آن گرمای واکنش به صورت زیر می‌شود

$Q = ۲ * ۲۴۲ + ۳۹۳ - ۷۴ = ۸۰۳kJ/mol(CH_۴)$

توان گرمایش از ضرب گرمای تولید شده توسط هر مول متان در نرخ بیرون آمدن متان به دست می‌آید

$P = ۲/۰kJ/s = ۷۲۰۰kJ/h = ۷۲۰۰BTU$

با کمی جستجو در اینترنت می‌توان توان گرمایش بیشینه‌ی اجاق گازها را پیدا کرد که عددی در حدود $۷۰۰۰BTU$ تا $۱۲۰۰۰BTU$ است.

(د) دو لیتر آب دو کیلوگرم وزن دارد، در نتیجه ظرفیت گرمایی آب ۸,۴ کیلو ژول بر درجه‌ی سانتیگراد می‌شود. با استفاده از این ظرفیت گرمایی برای رساندن آب از ۲۰ درجه‌ی سانتیگراد به ۱۰۰ درجه‌ی سانتیگراد ۶۷۲ کیلوژول انرژی لازم است. که با توان محاسبه شده ۵ دقیقه و ۳۰ ثانیه است. زمان واقعی (با آزمایش) در حدود ۱۲ دقیقه است، علت این اختلاف در نظر گرفتن اتلاف گرما به علت همرفت هوای گرم است.

(ه) گرمایی که ظرف دو ساعت با قدرت یک دهم تولید می‌شود ۱۴۴۰ کیلوژول است. با استفاده از گرمای نهان تبخیر این گرما می‌تواند ۰,۶ کیلوگرم (لیتر) آب را تبخیر کند.

۲.(الف)

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \quad (۷)$$

$$= T\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \quad (۸)$$

$$= T\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (۹)$$

$$= T\left(\frac{\partial^۲ p}{\partial T^۲}\right)_V = ۰ \quad (۱۰)$$

پس ظرفیت گرمایی تابع حجم نیست بنابر این ظرفیت گرمایی در حجم‌های بزرگ مانند ظرفیت گرمایی در حجم‌های معمولی رفتار می‌کند بنابراین همیشه $c_V = \frac{۳}{۲}nR$ است.

(ب)

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \quad (۱۱)$$

$$= \frac{c_V}{T}dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \quad (۱۲)$$

$$= \frac{\frac{۳}{۲}nR}{T}dT + \frac{nR}{V-nb}dV \quad (۱۳)$$

$$(۱۴)$$

با انتگرال‌گیری از دوطرف معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$S(T,V) = S_۰ + \frac{۳}{۲}nRlnT + nRln(V-nb) \quad (۱۵)$$

(ج)

$$
\begin{aligned}
dU &= Tds - pdV && (۱۶)\\
&= \frac{۳}{۲}nRdT + \frac{nRT}{V-nb}dV - pdV && (۱۷)\\
&= \frac{۳}{۲}nRdT + \left(p + \frac{n^۲a}{V^۲}\right)dV - pdV && (۱۸)\\
&= \frac{۳}{۲}nRdT + \left(\frac{n^۲a}{V^۲}\right)dV && (۱۹)\\
& && (۲۰)
\end{aligned}
$$

باز هم باید از طرفین معادله‌ی بالا انتگرال گرفت تا به نتیجه‌ی مطلوب برسیم. یعنی:

$$U = U_۰ + \frac{۳}{۲}nRT - \left(\frac{n^۲a}{V}\right) \qquad (۲۱)$$

(د) در حالت بی‌دررو آنتروپی ثابت است پس طبق رابطه‌ی ۱۵ خواهیم داشت:

$$T^{\frac{۳}{۲}}(V - nb) = constant \qquad (۲۲)$$

بنابراین

$$T_۲ = \left(\frac{V_۱ - nb}{V_۲ - nb}\right)^{\frac{۲}{۳}} T۱ \qquad (۲۳)$$

(ه) چون فرآیند بی‌دررو است گرمایی منتقل نشده است و طبق قانون اول ترمودینامیک تغییرات انرژی درونی گاز برابر با کار انجام شده روی آن است.

$$W = \Delta U = \frac{۳}{۲}nR\Delta T - \Delta\frac{n^۲a}{V} = \frac{۳}{۲}nRT_۱\left(\left(\frac{V_۱ - nb}{V_۲ - nb}\right)^{\frac{۲}{۳}} - ۱\right) + n^۲a\left(\frac{۱}{V_۱} - \frac{۱}{V_۲}\right) \qquad (۲۴)$$

۳. ابتدا توابع حالت را در هر نقطه مشخص می‌کنی. در ابتدا فشار و دما را داریم و با استفاده از معادله‌ی حالت می‌توانیم حجم اولیه را به دست بیاوریم. فشار، دما و حجم به صورت $p_۱ = ۱atm$ ، $T_۱ = ۲۹۸K$ و $V_۱ = ۲/۴۷ \times ۱۰^{-۲}m^۳$ به دست می‌آیند. به همین صورت برای نقطه‌ی دوم خواهیم داشت $p_۲ = ۲atm$ ، $T_۲ = ۵۹۶K$ و $V_۲ = ۲/۴۷ \times ۱۰^{-۲}m^۳$. با استفاده از معادله‌ی بی‌دررو هم تابع حالت‌های قسمت سوم نیز پیدا می‌شوند. یعنی $p_۳ = ۰/۳۵atm$ ، $T_۳ = ۲۹۸K$ و $V_۳ = ۶/۹۹ \times ۱۰^{-۲}m^۳$.
در تمامی موارد زیر کار و گرمای محیط روی گاز حساب شده است.

(الف)

$$Q = c_V\Delta T = ۳۷۱۰J \qquad (۲۵)$$

$$\Delta S = \int_{T_۱}^{T_۲}\frac{dQ}{T} = \int_{۲۹۸}^{۵۹۶}\frac{c_V dT}{T} = c_V ln(۲) = ۸/۶۳J/K \qquad (۲۶)$$

$$W = ۰ \tag{۲۷}$$

$$\Delta U = Q + W = Q = ۳۷۱۰J \tag{۲۸}$$

(ب)

$$Q = ۰ \tag{۲۹}$$

$$\Delta S = ۰ \tag{۳۰}$$

$$\Delta U = c_V \Delta T = -۳۷۱۰J \tag{۳۱}$$

$$W = \Delta U - Q = U = -۳۷۱۰J \tag{۳۲}$$

(ج)

$$W = \int_{V_۲}^{V_۱} -\frac{RT}{V} dV = -RTlnV_۱/V_۲ = ۲۵۷۰J \tag{۳۳}$$

$$\Delta U = ۰ \tag{۳۴}$$

$$Q = \Delta U - W = -۲۵۷۰J \tag{۳۵}$$

$$\Delta S = Q/T = -۸/۶۳J/K \tag{۳۶}$$

برای کل چرخه کافی‌است نتایج سه قسمت قبل را باهم جمع کنیم.

$$w = ۰ - ۳۷۱۰ + ۲۵۷۰ = -۱۱۴۰J \tag{۳۷}$$

$$\Delta U = ۰ \tag{۳۸}$$

$$Q = \Delta U - W = ۱۱۴۰J \tag{۳۹}$$

$$\Delta S = ۰ \tag{۴۰}$$