یعنی ضخامت لایه مرزی با عکس جذر عدد رینولدز متناسب است
پس برای وکت دستی در هوا و بال هواپیما در هوا که رینولدزها
تقریبا برابر و از رتبه 10^6 است، این لایه از رتبه $\frac{1}{100}$ عرض
دست (بال) هواپیما را تشکیل داده. پس در چنین سرایطی ضخامت این
لایه آنقدر کوچک است که میتوان از آن صرفنظر کرد و از قانون برنولی برای
این مسئله ها استفاده کرد.

ولی در مسائل زیادی ضخامت این لایه قابل صرفنظر کردن نیست.

به طول مثال در مسئله حرکت داخل سرنگ تنها نیروی که از این لایه
در داخل مخزن سرنگ صرفنظر کرد ولی مطمئناً در مورد شاره در داخل
سوزن آنچنان درست نیست. در داخل سوزن درجایی ضخامت این لایه به
سقف لوله میرسد. (شکل صفحه بعد)

$$\sigma(L_i) = a$$

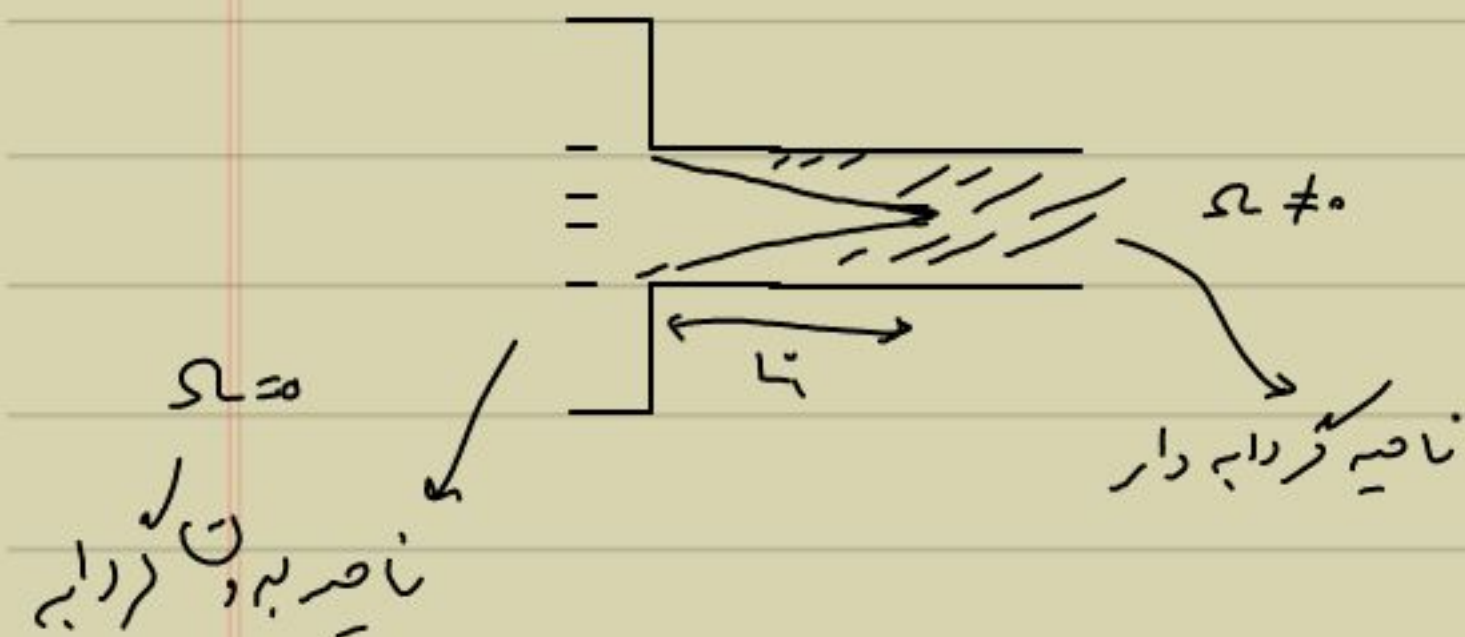
$$\sigma(L_i) \approx \sqrt{\frac{2\nu L_i}{u}} \rightarrow$$

$$L_i \sim \frac{u a^2}{2\nu} = \frac{1}{4}\frac{u(2a)}{\nu} a \approx 0.25\, Re\, a$$

البته در این تقریب هندسه استوانه ای سوزن نادیده گرفته شده که تاثیر زیادی دارد.

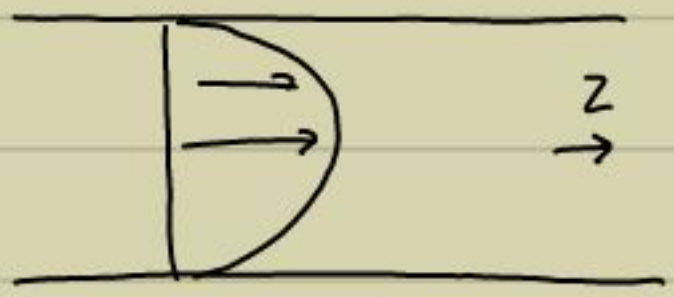
جواب بهتر است $L_i \approx 0.06\, Re\, a$

که با فرض $Re = 10^3$ و $a = 0.2\,mm$ نتیجه میشود $L_i \approx 12\,mm$. قابل مقایسه با طول سوزن.



در داخل سوزن رشد ضخامت این ناحیه درنهایت باعث پرشدن کل فضای داخل می‌شود. از زمان به بعد اثرات گرانروی آنقدر مهم است که تمایل برای تقریب قابل استفاده نیست و تغییرات فشار فقط برای خنثی کردن نیروی ناشی از تنش برشی گرانروی است.

جریان در داخل سوزن - جریان پوازل Poiseuille



فرض‌ها: تقارن استوانه‌ای

$\underline{u} = u\hat{z}$

$u = u(r)$

$u(a) = 0$

عنصر سیستم استوانه‌ای

به شعاع r و ضخامت

Δr و طول L را در نظر می‌گیریم.

$S(2\pi rL)$ نیروی وارد بر سطح

$\frac{\partial[2\pi rLS]}{\partial r}\Delta r$ اختلاف نیروی وارد بر سطح خارجی و داخلی

$$= 2\pi L\left[S + r\frac{\partial S}{\partial r}\right]\Delta r$$

$$= 2\pi L\eta\left[\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right]\Delta r \quad (1)$$

نیروی ناشی از اختلاف فشار

$$= -(2\pi r\,\Delta r)\frac{\partial p}{\partial z}L \quad (2)$$

$\sum F = 0$

$$(1) = (2) \rightarrow -r\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left[\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right] = 0$$

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{r}{\eta}\partial_z p = 0$$

از آنالیز می‌دانیم $\frac{\partial p}{\partial z}$ ثابت است.

جواب $u(r) = A + B\ln r + Cr^2$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{B}{r} + 2Cr \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{B}{r^2} + 2C$$

$$\rightarrow -\frac{B}{r} + 2Cr + \frac{B}{r} + 2Cr = +\frac{r}{\eta}\partial_z p \rightarrow$$

$$C = \frac{\partial_z p}{4\eta}$$

شرایط مرزی $\begin{cases} u(0) \text{ کران} \rightarrow B = 0 \\ u(a) = 0 \rightarrow A = -\frac{a^2}{4\eta}\partial_z p \end{cases}$

$$u_z = -\frac{(a^2 - r^2)}{4\eta}\partial_z p$$

$$Q = \int_0^a 2\pi r\,dr\; u(r) = -\int_0^a 2\pi r \frac{(a^2-r^2)}{4\eta}\partial_z p\,dr$$

$$= -\frac{\pi \partial_z p}{2\eta}\int_0^a (a^2 r - r^3)\,dr$$

$$= -\frac{\pi \partial_z p}{2\eta}\left[\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{4}a^4\right]$$

$$= -\frac{\pi \partial_z p}{8\eta}a^4$$

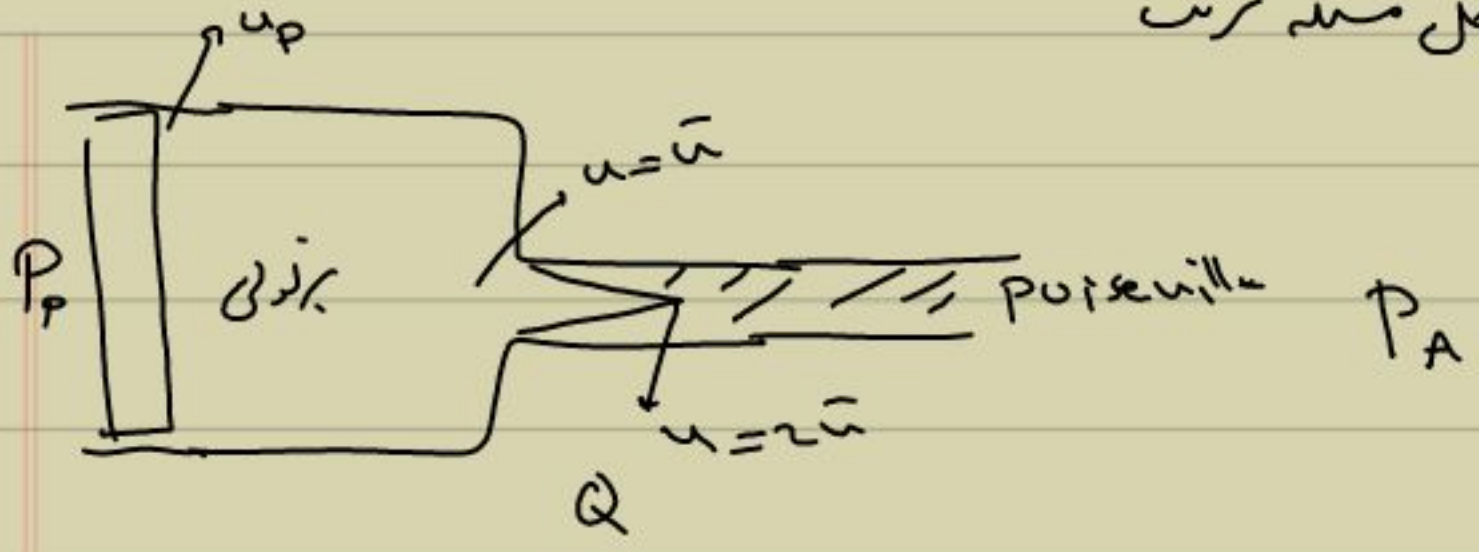
اهمیت رابطه: تناسب با $\partial_z p$ و a^4

← وابستگی شدید به ابعاد لوله.

← متناسب

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{a^2}{8\eta}\partial_z p = \frac{1}{2}u(0)$$

حل مسئله رینگ



$$p_p - p_Q = \frac{1}{2}\rho(u_Q^2 - u_p^2) \simeq \frac{1}{2}\rho(4\bar{u}^2) = 2\rho\bar{u}^2 \quad (2)$$

$$Q = \bar{u}\pi a^2 = \frac{\pi a^4}{8\eta} \Delta p \Rightarrow$$

$$Re = \frac{2a\rho u}{\eta}$$

$$p_Q - p_A = \frac{8\eta\bar{u}}{a^2}(L - 0.06 Re\, a)$$

$$= \frac{16\rho\bar{u}^2}{Re\, a}[L - 0.06\, Re\, a]$$

$$= 16\rho\bar{u}^2\left[\frac{L}{aRe} - 0.06\right] \quad (1)$$

(1) + (2) →

$$p^* = 16\rho\bar{u}^2\left[\frac{L}{aRe} - 0.06 + \frac{1}{8}\right]$$

$$= 16\rho\bar{u}^2\left[\frac{L}{aRe} + 0.065\right]$$

بدون بعد

$$\frac{p^* a^4}{\rho Q^2} = f\left(\frac{L}{a}, Re\right)$$

$$\frac{p^* a^4}{\rho \pi^2 a^4 \bar{u}^2} = \frac{p^*}{\pi^2\rho\bar{u}^2} = \underbrace{\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{L}{aRe} + 0.07\right]}_{f}$$

- بحث ناپایداری

معادلات همیلتون دینامیک غیرخطی هستند

معادلات غیرخطی ← پاسخ‌های ناپایدار

ناپایداری ≡ اختلالی از پاسخ پایدار سیستم را از پاسخ دور کند

اگر معادلات خطی باشند هر اغتشاش به دلیل تلف کمترین از بین می‌رود، و پاسخ‌ها پایدار هستند.

ولی اگر معادلات غیرخطی داشته باشیم، جهت حفظ شدگی می‌تواند باعث بقای اغتشاش یا حتی تقویت آن‌ها شود.